JAN 9 - 1947

Akustische Zeitschrift

Im Auftrage der

DEUTSCHEN FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT

unter Mitwirkung der

DEUTSCHEN REICHSPOST und PHYSIKAL.-TECHN. REICHSANSTALT

herausgegeben von

MARTIN GRÜTZMACHER und ERWIN MEYER

1. Edgar Mohr: Klanganalyse mit einem Ultraschall-Plattenspektroskop 209
2. H. Pfriem: Zur Theorie ebener Druckwellen mit steiler Front 222
3. Wilhelm Ernsthausen: Der Einfluß aerodynamischer Eigenschaften auf Schallfeld und Strahlungsleistung einer Luftschraube 245
4. Schrifttum 261
5. Nachrichten 264

Viertes Heft Sechster Jahrgang Juli 1941

Verlag von S. Hirzel in Leipzig

Akustische Zeitschrift

Die Zeitschrift erscheint in 6 Heften je Jahrgang. Der Bezugspreis beträgt 10.— RM. je Jahrgang. Von den Originalbeiträgen und zusammenfassenden Berichten stehen den Verfassern 30 Sonderdrucke unberechnet zur Verfügung. Weitere Exemplare werden berechnet und müssen bei Rückgabe der Fahnenkorrekturen bestellt werden

Schriftleitung:

Dr. Martin Grützmacher, Oberregierungsrat und Mitglied der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, Berlin NW. 87, Franklinstr. 22

Professor Dr. Erwin Meyer, Institut für Schwingungsforschung an der Technischen Hochschule, Berlin NW. 87, Franklinstr. 1

*

Beiträge, sowie alle die Schriftleitung betreffenden Zuschriften werden erbeten an: Dr. Martin Grützmacher, Berlin NW. 87, Franklinstr. 22

WECO-DÄMMSTOFFE-DRP.

gegen Schall jeder Art und Stärke (z. T. auch Wärme) entsprechen den bisherigen Forschungsergebnissen, der neuzeitlichen Technik und den Forderungen der Praxis und Erfahrung und besitzen höchsten Dämmwert, gleichbleibende Dauerwirkung, größte Wirtschaftlichkeit, geringste Baustärke, beste Belastungsfähigkeit und weitgehende Immunität gegenüber allen normalen Einflüssen der Praxis.

Tausendfach bewährte WECO-Schalldämmungen auf Grund 25jähriger Erfahrungen im In- und Ausland, zahllose Referenzen von staatlichen, städtischen, industriellen und sonstigen Bauten und Betrieben über von uns ausgeführte Schall-Dämmungen bei Fußböden, Wänden, Auflagern, Maschinen, Fundamenten usw.

WEISS & CO, LEIPZIG C1 / Weco-Schalldämmungen-DRP.

AKUSTISCHE ZEITSCHRIFT

Viertes Heft | Sechster Jahrgang | Juli 1941

Klanganalyse mit einem Ultraschall-Plattenspektroskop *)

Von Edgar Mohr

Mitteilung aus dem Institut für Schwingungsforschung der Technischen Hochschule Berlin

(Mit 27 Textabbildungen)

I. Einleitung

Zur Klanganalyse wird meist das Suchtonverfahren verwendet, das wegen der mit jeder Änderung der Suchtonhöhe verbundenen Einschwingvorgänge des Filters den Nachteil einer geringen Analysiergeschwindigkeit besitzt. Eine Vergrößerung der Analysiergeschwindigkeit erreicht man einmal dadurch, daß man eine große Anzahl von mechanischen[1]) oder elektrischen[2]) Resonatoren über den Spektralbereich verteilt, die alle gleichzeitig im Moment der Schallerregung einschwingen, oder dadurch, daß man einen akustischen[3]) oder lichtoptischen[4])[5]) Interferenzvorgang zur spektralen Zerlegung benutzt, was formal der Verwendung einer unendlichen Zahl kontinuierlich über das Spektrum verteilter Resonatoren entspricht.

E. Meyer und E. Thienhaus entwickelten ein schallspektroskopisches Verfahren, das speziell ein Beugungsgitter benutzte, zur augenblicklichen spektralen Anzeige eines Schallvorganges. Wegen der großen Wellenlänge wurde dabei der Hörschall einer Trägerfrequenz im Ultraschallgebiet überlagert. Man erhält auf diese Weise Spektren, die mit denen eines Suchtonverfahrens verglichen werden können, nur daß der Analysiergeschwindigkeit praktisch kaum Grenzen gesetzt sind.

In der vorliegenden Arbeit wurde dieser Gedanke weitergeführt, indem das aus der Optik bekannte Plattenspektroskop (Perot-Fabry; Lummer-Gehrcke-Platte) auf akustische Verhältnisse übertragen wurde. Hierfür sprechen besonders folgende Gesichtspunkte:

1. Es lassen sich in der Interferenzplatte bei kleiner Raumbeanspruchung große Schalllaufzeiten und damit ausreichende Trennschärfen erreichen.

2. Den tiefen Hörschallfrequenzen lassen sich besonders große, nur durch die Schallabsorption begrenzte Trennschärfen zuordnen, wie es die praktische Anwendung erfordert.

II. Anordnung

Es kommt nur eine Anordnung des Plattenspektroskops in Betracht, die zur Erzeugung der Wegdifferenzen der Schallstrahlen die Schallausbreitung in Luft oder einem anderen Gase benutzt. Mit Flüssigkeits- oder Körperschall würden sich wegen der großen Schallgeschwindigkeit zu kleine Laufzeitdifferenzen der interferierenden Strahlen und damit zu geringe Trennschärfen ergeben [vgl. Formel (11)].

Abb. 1 zeigt die gewählte Anordnung des Plattenspektroskops. Die vom Ultraschallsender ausgehenden Schallstrahlen erleiden in dem planparallelen Raum zwischen Glasplatte und Folie Zickzack-Reflexionen. Aus diesem

*) D 11.

[1]) C. N. Hickman, J. Acous. Soc. Am. 6 (1934), S. 108.

[2]) E. Freystedt, Z. techn. Phys. 16 (1935), S. 533.

[3]) E. Meyer und E. Thienhaus, Z. techn. Phys. 15 (1934), S. 630; E. Thienhaus, Das akustische Beugungsgitter und seine Anwendung zur Schallspektroskopie, Leipzig 1935.

[4]) J. F. Schouten, Philips techn. Rdsch. 3 (1938), S. 310.

[5]) H. E. R. Becker, Ann. Phys. 36 (1939), S. 585. Diese Arbeit, die die Lichtbeugung an Kapillarwellen zur Klanganalyse benutzt, wurde erst nach Abschluß dieser Arbeit bekannt.

Interferenzraum treten durch die schalldurchlässige Folie parallele Strahlen aus, die konstante Wegdifferenzen haben und durch einen parabolischen Zylinderspiegel im Brennpunkt zur Interferenz gebracht werden. Der Zylinderspiegel ist gegen die horizontale Ebene, auf der die Interferenzplatte und der Bändchenstrahler senkrecht stehen, geneigt und um den Drehpunkt D schwenkbar[6]) angeordnet. Genau senkrecht über D befindet sich der Brennpunkt des Spiegels und in ihm die Mitte des Mikrophonbändchens. DE ($= 120$ cm) sei der Schwenkarm, an dem der Spiegel befestigt ist. Dabei sei angenommen, daß eine Ebene durch DE senkrecht zur horizontalen Ebene auch auf dem Spiegel senkrecht steht. Mit ϑ werde der Winkel bezeichnet, den der Schwenkarm DE mit der Plattennormalen bildet und der die Stellung des Spiegels festlegt. Nur diejenigen parallelen Strahlen, die unter dem Austrittswinkel ϑ die Folie verlasssen, werden im Brennpunkt abgebildet. Der Spiegel kann von einem Motor gleichmäßig geschwenkt und der von dem Mikrophon aufgenommene Schalldruck des Interferenzvorganges mit dem NEUMANN-Schnellpegelschreiber registriert werden.

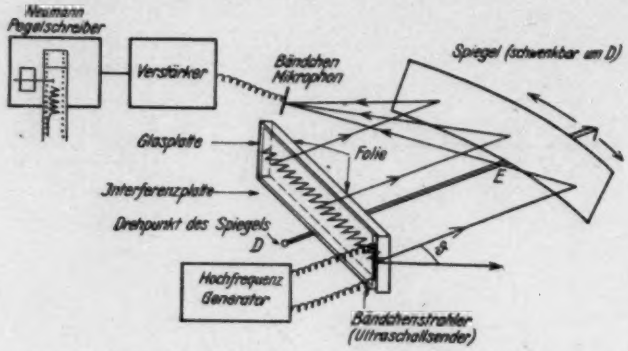

Abb. 1. Ultraschall-Plattenspektroskop, allgemeine Anordnung

III. Technische Ausführung

Abb. 2 zeigt die Konstruktion der Interferenzplatte. Der Interferenzraum wird von einer Glasplatte und einer Folie begrenzt. Glasplatte und Folie müssen genau planparallel sein. Hierzu wurde eine Zelluloidfolie[7]) von 50 μ Dicke auf einen Holzrahmen aufgezogen und dann über einen Distanzrahmen von 3 cm Höhe gespannt, der auf der Glasplatte auflag. Die Längsstücke des Distanzrahmens bestanden aus gezogenem Messing-Vierkantrohr. Als Glasplatte wurde Zwischenschichtglas verwandt, das eine große Dämpfung besitzt und dadurch ein Mitschwingen ausschließt. Die Glasplatte wurde wegen ihrer starken Welligkeit mit Schraubzwingen gegen den Distanzrahmen angepreßt. Der Rand des Interferenzraumes wurde mit Absorptionsmaterial ausgekleidet, um störende Reflexionen an dem Rahmen zu vermeiden. Die verbleibenden lichten Abmessungen des Interferenzraumes waren ungefähr $3 \times 13 \times 78$ cm^3. An der Schmalseite des Rahmens erfolgte durch einen Spalt von 0,7 cm Breite die Schalleinstrahlung des Bändchens. Die parallel zum Bändchen liegende, starre Seitenfläche des Rahmens, die hier nicht mit Absorptionsmaterial ausgekleidet war, bildete eine Spiegelungsfläche für den Interferenzraum, was sich experimentell für kleine Einstrahlungswinkel ϑ als günstig erwies.

Es sei noch erwähnt, daß anfangs Versuche mit einer von zwei planparallelen Folien begrenzten Interferenzplatte gemacht wurden. Die Einstrahlung erfolgte aus etwa 30 cm Entfernung durch die erste Folie hindurch. Die

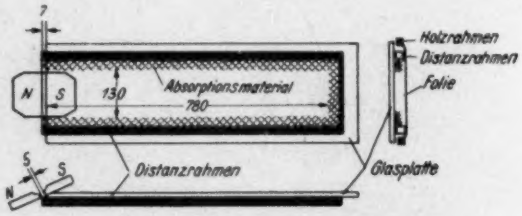

Abb. 2. Interferenzplatte

[6]) Statt des Spiegels kann auch das Mikrophon bewegt werden.

[7]) Anfangs wurden Zellophanfolien benutzt (18 μ, 40 μ), die durch Behandlung mit Wasserdampf spiegelglatt gespannt wurden, aber an Festigkeit zu wünschen übrig ließen. Undurchsichtige Materialien (Papier) wurden vermieden, da sie keine optische Kontrolle auf Planparallelität zuließen (vgl. Abschnitt VIII). Die Zelluloidfolien können auch durch solche aus Ultrafan ersetzt werden.

erzielten Ergebnisse waren besonders für die kleinen Winkel recht gut. Wegen konstruktiver Nachteile und aus Gründen der Schallintensität wurde diese Anordnung verlassen und die vorher beschriebene Anordnung gewählt.

Als Spiegel wurde ein parabelförmig aufgebogenes Messingblech benutzt.

Der von THIENHAUS beschriebene Bändchenstrahler wurde beibehalten. Als Empfänger bewährte sich ein gewöhnliches Tonfrequenz-Bändchenmikrophon mit einem 0,5 μ starken Bändchen aus Schlagaluminium.

IV. Schalldruckverlauf eines Interferenzmaximums

Bei der Anwendung des Verfahrens zur Klanganalyse handelt es sich im allgemeinen um Klänge, die viele Teilkomponenten enthalten. Um jedoch die Wirkungsweise der Apparatur zu erläutern, diskutieren wir zunächst folgenden vereinfachten Fall. Von dem Bändchen gehe ein Schallstrahl der Frequenz ν aus, der die Interferenzplatte unter dem Einfallswinkel ϑ trifft (s. Abb. 3). Nach den Zickzack-Reflexionen des Strahls entstehe nun in dem Raum vor der Folie ein System paralleler Strahlen, von denen wir annehmen wollen, daß die Schalldruckamplitude zweier aufeinanderfolgender Strahlen sich um einen Faktor $e^{-\mu}$ und um die Phase α unterscheide.

Betrachten wir die ersten q-Strahlen, so erhalten wir für den resultierenden Schalldruck im Brennpunkt des Spiegels folgenden Ausdruck:

$$P = \sum_{n=0,1\ldots(q-1)} e^{-(\mu+i\alpha)n} = \frac{1-e^{-(\mu+i\alpha)q}}{1-e^{-(\mu+i\alpha)}}.$$

Setzen wir zur Abkürzung für $\mu \cdot q = \eta$, wobei dann η die Schwächung des letzten aus der Platte austretenden Strahls in Neper bedeutet, so folgt schließlich nach trigonometrischer Umformung unter Berücksichtigung, daß $\mu \ll 1$ ist, für den Intensitätsverlauf der Interferenzerscheinung

$$(1) \qquad P^2 \approx q^2 e^{-\eta} \frac{\mathfrak{Sin}^2 \frac{\eta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha \cdot q}{2}}{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + q^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Die Phasendifferenz α und die Zahl q der zur Interferenz gelangenden Strahlen hängen in einfacher Weise von den geometrischen Abmessungen der Interferenzplatte und dem Einfallswinkel ϑ ab. Es bedeuten

d = Plattenabstand,
l = Plattenlänge,
s = Wegdifferenz zweier aufeinanderfolgender Strahlen,
τ = Laufzeitdifferenz zweier aufeinanderfolgender Strahlen,
k = Wellenzahl $= \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$.

Dann gilt nach Abb. 3

$$(2) \qquad s = 2\,d\cos\vartheta,$$

$$(3) \qquad \alpha = k \cdot s = \frac{4\pi d \cos\vartheta}{\lambda} = 2\pi\nu\tau,$$

$$(4) \qquad q = \frac{l}{2\,d\,\mathrm{tg}\,\vartheta}.$$

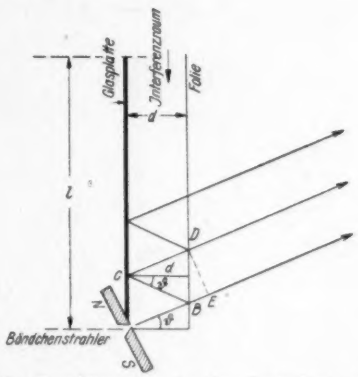

Abb. 3. Strahlengang in der Interferenzplatte

Der oben formal eingeführte Dämpfungsexponent μ wird sich im allgemeinen aus verschiedenen Anteilen zusammensetzen, die z. B. von der Luftabsorption, dem Schluckgrad der Folie usw. herrühren können und später genauer diskutiert werden. μ und dementsprechend auch η wird außerdem noch eine Funktion des Einfallswinkels ϑ sein. Führen wir nämlich einen Schallabsorptionskoeffizienten m (auf die Schallenergie bezogen) für die Schallausbreitung in der Platte ein, so können wir für η auch schreiben:

$$(5) \qquad \eta = \mu \cdot q = \frac{m}{2} \cdot s \cdot q = \frac{m}{2} \cdot l \cdot \frac{\cos\vartheta}{\mathrm{tg}\,\vartheta}.$$

In dieser Formel ist der, wie sich noch zeigen wird, nur geringe Schluckgrad der Folie nicht berücksichtigt.

Wir diskutieren jetzt für den Spezialfall $m = 0$ den Intensitätsverlauf des Schalldrucks im Brennpunkt des Spiegels. Aus der Formel (1) folgt wegen $\eta = 0$ folgende einfache und bekannte Beziehung

$$P^2 = \frac{\sin^2 \frac{\alpha \cdot q}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \tag{6}$$

P nimmt maximale Werte an für

$$\frac{\alpha}{2} = n\pi. \tag{7}$$

Diese Stellen sind die Hauptmaxima, wobei n die Ordnungszahl des jeweiligen Maximums bedeutet. Abb. 4 (Kurve für $\eta = 0$) vermittelt

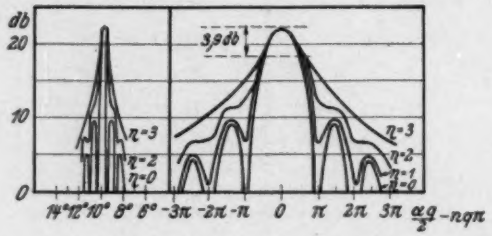

Abb. 4. Schalldruckverlauf eines Interferenzmaximums für verschiedene Strahlschwächungen η

eine Vorstellung von dem Intensitätsverlauf in der Umgebung eines Hauptmaximums in Abhängigkeit von $\frac{\alpha \cdot q}{2}$. Die Nebenminima liegen an den Stellen

$$\frac{\alpha \cdot q}{2} = n \cdot q \cdot \pi + m\pi \qquad m = 1, 2, 3 \ldots \tag{8}$$

Aus Gl. (3) und (7) folgt für die Frequenz, für die das Hauptmaximum unter dem Winkel ϑ auftritt

$$\nu = \frac{c}{2d \cos \vartheta} \cdot n. \tag{9}$$

Bezeichnet man mit ν_0 die Frequenz, die für $\vartheta = 0$ angezeigt wird, so ergibt sich für die relative Frequenzzunahme

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{1 - \cos \vartheta}{\cos \vartheta} \approx \frac{1}{2} \vartheta^2$$

eine von der Ordnungszahl n unabhängige Beziehung. Man kann daraus ersehen, daß der Winkel ϑ, unter dem eine Frequenz ν angezeigt wird, abnimmt, wenn bei konstantem Frequenzabstand $\nu - \nu_0$ die Frequenz ν_0 vergrößert wird.

Ein Spektrum vorgegebener Bandbreite wird also mit wachsender Frequenz ν_0 (Trägerfrequenz) auf immer kleinere Winkel zusammengedrängt.

Aus (9) ist ersichtlich, daß unter einem bestimmten Winkel nacheinander in den Frequenzabständen $\frac{c}{2d \cos \vartheta}$ eine Anzeige erfolgt, da die Ordnungszahl n alle ganzen Zahlen annehmen kann. Dieser Frequenzabstand wird als Dispersionsgebiet bezeichnet und hängt im wesentlichen von der Plattendicke ab. Er bestimmt vor allem den größtmöglichen Frequenzbereich eines Spektrums, der gleichzeitig ohne Überdeckung zur Anzeige gelangen kann (vgl. Abb. 20).

Wenn wir zwei benachbarte Frequenzen ν und $\nu + \Delta\nu$ zur Anzeige bringen, dann ist eine Unterscheidung nach den Erfahrungen in der Optik gerade dann noch möglich, wenn das Hauptmaximum der einen Frequenz ν_{max} mit dem ersten Minimum der anderen Frequenz ν_{min} zusammenfällt. Diesen Frequenzabstand, der gerade noch gut aufgelöst wird, definiert man als die Trennschärfe

$$\Delta\nu = \nu_{max} - \nu_{min}. \tag{10}$$

Aus Gl. (3), (8) und (10) folgt

$$q(\alpha_{max} - \alpha_{min}) = 2\pi = 2\pi \, \Delta\nu \cdot \tau \cdot q$$

und für die Trennschärfe

$$\Delta\nu = \frac{1}{q \cdot \tau} = \frac{c}{q \cdot s} = \frac{c}{l} \cdot \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\cos \vartheta}. \tag{11}$$

Die Trennschärfe ist also umgekehrt proportional der Laufzeitdifferenz zwischen dem ersten und letzten Strahl[8]) und hängt bei gegebener Plattenlänge l nur vom Winkel ϑ ab.

Wie man aus Abb. 4 ablesen oder genauer aus Gl. (6) ableiten kann, stimmt für die Ordinate 3,9 db unterhalb der maximalen Schallintensität die Breite des Maximums im Frequenzmaßstab gemessen mit der oben definierten Trennschärfe überein. Experimentell wurde die Trennschärfe immer aus der so eingeführten 3,9 db Breite bestimmt, um von den Nebenminima unabhängig zu werden.

Bei den Messungen ist im allgemeinen die Schallintensität in Abhängigkeit vom Winkel

[8]) Da diese Laufzeitdifferenz mit der Einschwingzeit des Spektroskops zusammenfällt, gilt hier die nämliche Beziehung wie zwischen der Einschwingzeit und der Lochbreite eines Filters, worauf schon E. Meyer und E. Thienhaus (a. a. O.) hinwiesen.

bestimmt worden, so daß unmittelbar nur die 3,9 db Breiten $\Delta\vartheta$ im Winkelmaßstab gegeben sind. Wir erhalten nun aus den Gl. (9) und (10) folgende Beziehung

$$\Delta\nu = \frac{c\cdot n}{2d}\left(\frac{1}{\cos\vartheta_{max}} - \frac{1}{\cos\vartheta_{min}}\right) \approx \frac{c\cdot n}{2d}\,\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\cos\vartheta}\,\Delta\vartheta\,,$$

so daß durch Gleichsetzen mit Gl. (11) schließlich für $\Delta\vartheta$ folgt

$$\Delta\vartheta = \frac{2d}{n\cdot l}\,. \tag{12}$$

Es ergibt sich also, daß die 3,9 db Breite unabhängig vom Winkel ist.

Wir haben bisher den Fall $m = 0$ bzw. $\eta = 0$ behandelt, d. h. wir haben angenommen, daß zwei aufeinanderfolgende Strahlen gleiche Amplitude besitzen. In Wirklichkeit ist diese Bedingung aber nicht erfüllt. Wir müssen deshalb noch untersuchen, in welcher Weise die eben abgeleiteten Ergebnisse verändert werden, wenn wir mit einem vorgegebenen Wert η zu rechnen haben, der also die Strahlschwächung des letzten aus der Platte austretenden Strahls angibt. In Abb. 4 ist der Intensitätsverlauf nach Gl. (1) für verschiedene η in Abhängigkeit von $\frac{\alpha\cdot q}{2}$ aufgetragen. Man erkennt, daß mit wachsendem η eine Ausglättung der Nebenminima und -maxima erfolgt und zugleich eine Verbreiterung des Hauptmaximums. Aus den Kurven ist auch ersichtlich, daß die oben als Trennschärfemaß eingeführte 3,9 db Breite mit wachsendem η verhältnismäßig wenig geändert wird. Um in den Formeln (11) und (12) für die Trennschärfen $\Delta\nu$ und $\Delta\vartheta$ den Einfluß von η zu berücksichtigen, multiplizieren wir sie noch mit einem Faktor $f(\eta)$, der aus Gl. (1) im einzelnen berechnet wurde und aus Abb. 5 für die verschiedenen η Werte entnommen werden kann. Die neuen Formeln für $\Delta\nu$ und $\Delta\vartheta$ sind also nach (11) und (12)

$$\Delta\nu = \frac{c}{l}\,\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\cos\vartheta}\cdot f(\eta)\,, \tag{13}$$

$$\Delta\vartheta = \frac{2d}{n\cdot l}\cdot f(\eta)\,. \tag{14}$$

Für nahezu senkrechten Einfall, also kleine Winkel ϑ, wird nach Gl. (5) bei vorgegebenem m und l die Strahlschwächung η sehr groß. In diesem Fall erhält man für den Intensitätsverlauf nach Gl. (1) unter Berücksichtigung von $\mu = \frac{\eta}{q}$ folgenden Grenzwert:

$$P^2 \approx \frac{1}{\mu^2 + 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\,. \tag{15}$$

Dieser Ausdruck ergibt den glatten Intensitätsverlauf[9]), wie er auch in Abb. 4 für große η eingetragen ist. Berechnet man aus Gl. (15) die oben als Trennschärfe eingeführte 3,9 db

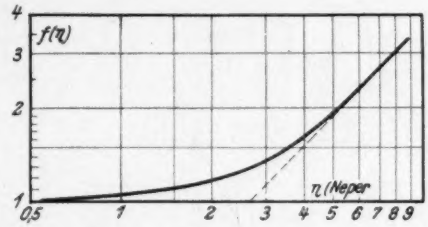

Abb. 5. Einfluß der Strahlschwächung η auf die Trennschärfe

Breite, so erhält man unter Berücksichtigung von (5)

$$\Delta\nu = \frac{c}{5{,}2}\cdot m\,, \tag{16}$$

so daß die Trennschärfe bei kleinem ϑ durch den Schallabsorptionskoeffizienten in der Platte begrenzt wird.

V. Diskussion der Meßergebnisse

In diesem Abschnitt wollen wir die wesentlichen Ergebnisse des vorigen Kapitels experimentell nachprüfen. Es interessiert zunächst im Hinblick auf die Anwendung zur Klanganalyse, welche Trennschärfen mit dem Verfahren erreicht werden können. Um die theoretische Trennschärfe nach Gl. (13) mit den experimentellen Werten vergleichen zu können, brauchen wir außer der Plattenlänge ($l = 75$ cm) noch den Parameter η, der die Strahlschwächung des letzten aus der Platte austretenden Strahls angibt. η wurde nun experimentell in Abhängigkeit vom Winkel ϑ auf folgende Weise bestimmt. Es wurde ein Spalt längs der Platte verschoben und in den verschiedenen Stellun-

[9]) Es sei erwähnt, daß Ausdruck (15) in Parallele zu der Selektion eines Schwingungskreises gesetzt werden kann, da statt (15) in der Umgebung eines Maximums auch $P^2 \approx \frac{1}{\mu^2 + (\alpha - \alpha_{max})^2}$ gilt. Drückt man α durch die Frequenz aus, so erhält man den Resonanznenner eines Schwingungskreises.

gen des Spaltes[10]) jedesmal der Schalldruck des Interferenzmaximums mit dem Pegelschreiber registriert. Abb. 6 zeigt für ein Meßbeispiel, wie η für einen bestimmten Winkel $\vartheta = 5^0$ aus der Neigung einer Geraden, die wegen der logarithmischen Anzeige einer exponentiellen Abnahme der Strahlamplitude entspricht,

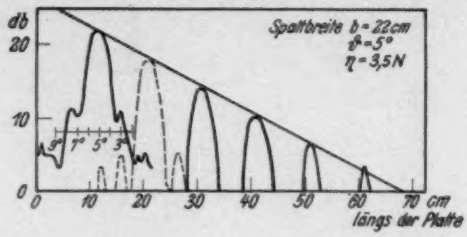

Abb. 6. Meßbeispiel zur Bestimmung der Strahlschwächung η

bestimmt wurde. Kurve *a* in Abb. 24 zeigt den gemessenen Verlauf von η in Abhängigkeit von ϑ, der allen im folgenden mitgeteilten Messungen zugrunde lag.

Die Trennschärfe wurde für bestimmte Winkel ϑ ermittelt, indem bei feststehendem Spiegel die Frequenz kontinuierlich verändert und der Schalldruckverlauf gleichzeitig registriert wurde. Aus den Kurven, die sich auf die 8. Ordnung beziehen, wurde die Trennschärfe als 3,9 db Breite entnommen und in Abb. 7 für die verschiedenen Winkel eingetragen. Bei 5^0 z. B. ergaben sich 60 Hz Trennschärfe. Zum Vergleich wurden die theoretisch nach Gl. (13) zu erwartenden Trennschärfen $\Delta\nu$ miteingetragen

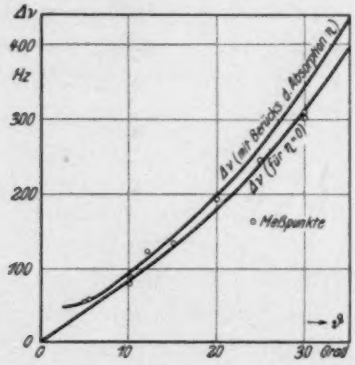

Abb. 7. Trennschärfe $\Delta\nu$ in Abhängigkeit vom Winkel ϑ

[10]) Die Spaltbreite (22 cm) wurde so groß gewählt, daß Beugungsfehler bei der Ausblendung zu vernachlässigen waren.

unter Berücksichtigung der gemessenen Werte für η. Außerdem wurde noch die maximal erreichbare Trennschärfe für den absorptionsfreien Fall, d. h. $\eta = 0$, miteingetragen. Bei größeren Winkeln ist, wie man sieht, diese maximale Trennschärfe nahezu erreicht worden. Bei kleineren Winkeln nähern wir uns einem konstanten Wert für die Trennschärfen, wie auch nach Gl. (16) zu erwarten ist.

Die Trennschärfe wurde außerdem bei den verschiedenen Winkeln der vorher beschriebenen Messung dadurch nachgeprüft, daß die angezeigte Frequenz konstant gelassen und der Schalldruckverlauf an der Stelle des Maximums in Abhängigkeit vom Winkel registriert wurde. Aus den Kurven wurden wieder die 3,9 db Breiten, aber jetzt im Winkelmaßstab, entnommen und in Abb. 8 eingetragen. Zum Vergleich sind ebenfalls wieder die aus Gl. (14) sich ergebenden theoretischen Kurven für $\Delta\vartheta$ eingetragen. Für den absorptionsfreien Fall $\eta = 0$ würde sich nach Gl. (11) $\Delta\vartheta = \text{const.}$ ergeben, wie dies in der Abb. 8 miteingezeichnet wurde. Die gemessenen Trennschärfen stimmen recht gut mit den theoretischen Werten überein.

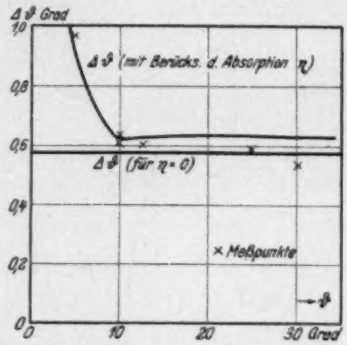

Abb. 8. Breite $\Delta\vartheta$ der Interferenzmaxima in Abhängigkeit vom Winkel

Um einen Überblick über das Aussehen der Interferenzmaxima verschiedener Ordnung und in einem größeren Frequenzbereich zu gewinnen, wurden für die Frequenzen, die für $\vartheta = 17^0$ nacheinander, wie in Zusammenhang mit Formel (9) auseinandergesetzt wurde, zur Anzeige gelangen, die Interferenzmaxima in Abhängigkeit vom Winkel registriert und in Abb. 9 für eine Auswahl von n innerhalb des Frequenzbereichs von 12,5—97 kHz zusammengestellt.

Es fällt dabei auf, daß die 3,9 db Breite im Winkelmaßstab sich mit wachsender Ordnungszahl verringert. Die gemessenen Linienbreiten stimmen auch zahlenmäßig gut mit (14) überein, vor allem für die niederen Ordnungszahlen ($n < 12$).

Für das Interferenzmaximum 8. Ordnung in Abb. 9, also für die Frequenz 47,5 kHz wurde der Einfluß der Plattenlänge auf die Linienbreite $\Delta\,\vartheta$ gemessen. In Abb. 10 sind

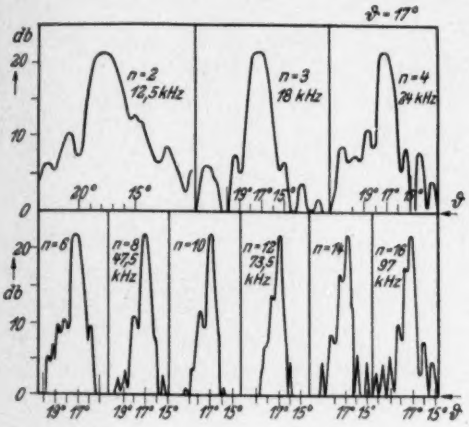

Abb. 9. Schalldruckverlauf der Interferenzmaxima für die Ordnungen $n = 2$ bis $n = 16$ bei $\vartheta = 17^0$

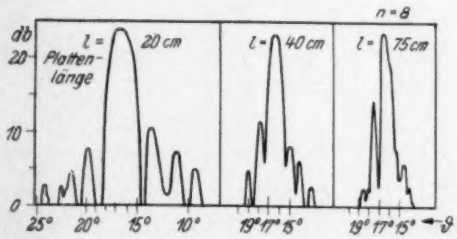

Abb. 10. Interferenzmaxima bei verschiedenen Plattenlängen

die Interferenzmaxima für die Plattenlängen 20, 40 und 75 cm, die durch Abblenden des Plattenendes hergestellt wurden, zusammengestellt. Die gemessenen Linienbreiten wachsen mit abnehmender Plattenlänge und werden nach Formel (14) auch quantitativ richtig wiedergegeben. Bei kleinen Plattenlängen sind übrigens, wie man durch Vergleich mit Abb. 4 sieht, die Nebenmaxima in der nahezu richtigen Größe ausgebildet.

Bisher haben wir bei der Diskussion der Interferenzerscheinungen nur den Intensitätsverlauf in der unmittelbaren Umgebung des Hauptmaximums betrachtet. Um uns auch einen Überblick über einen größeren Winkelbereich zu verschaffen, wurde nach Gl. (1) der Intensitätsverlauf für $\vartheta = 0^0$—35^0 berechnet, und zwar für eine Frequenz, die bei $\vartheta = 15^0$ in der 8. Ordnung zur Anzeige gelangt. Hierbei wurden die Parameter α und q nach Gl. (3) und (4) aus der Plattendicke $d = 3$ cm und der Plattenlänge $l = 75$ cm berechnet. Außerdem

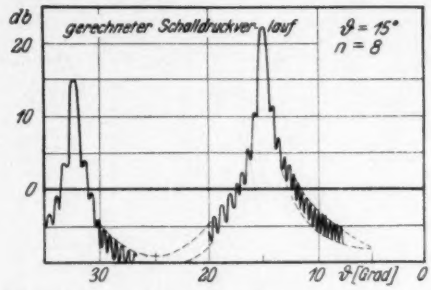

Abb. 11. Gerechneter Schalldruckverlauf eines Interferenzmaximums über den Winkelbereich von 0—35°

wurde für η die experimentell ermittelte Kurve a der Abb. 24 zugrunde gelegt. Der errechnete Intensitätsverlauf wurde in Abb. 11 im logarithmischen Maßstab über dem Winkel ϑ aufgetragen.

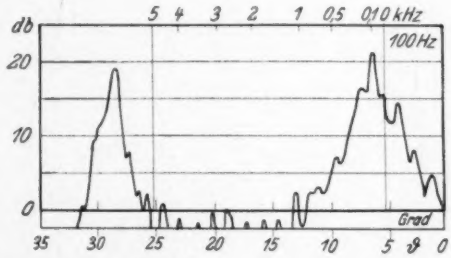

Abb. 12. Meßbeispiel: reiner Ton (100 Hz)

Zum Vergleich wurde der Intensitätsverlauf jeweils für eine Ultraschallfrequenz, die in 8. Ordnung in dem Winkelbereich von 0^0—25^0 zur Anzeige gelangt, in Abhängigkeit vom Winkel registriert. Hierfür geben die Abb. 12 bis 18 einige Meßbeispiele[11]). (Die in den Abbildungen angeschriebenen Tonfrequenzen beziehen sich auf die später beschriebenen Klanganalysen). Auf einem Teil der Abbildungen

[11]) Bei der Aufnahme der Kurven wurde jeweils die günstigste Phasenfehlerkompensation benutzt, die später (Kap. VIII) erläutert wird.

kommt bei größeren Winkeln die Ultraschallfrequenz auch noch in 7. Ordnung zur Anzeige. In den Abbildungen sind nur die ersten Nebenmaxima gut ausgebildet, soweit die vorliegende Absorption dies erwarten läßt. Ferner erfolgt unter größeren Winkeln ϑ. Bemerkenswerterweise ist in den Abbildungen nirgends merklich diffuser Schall überlagert, obgleich an keiner Stelle außerhalb der Platte Absorptionsmaterial verwandt wurde.

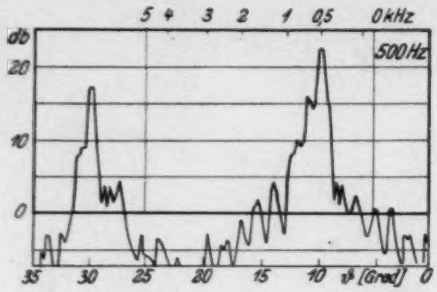

Abb. 13. Meßbeispiel: reiner Ton (500 Hz)

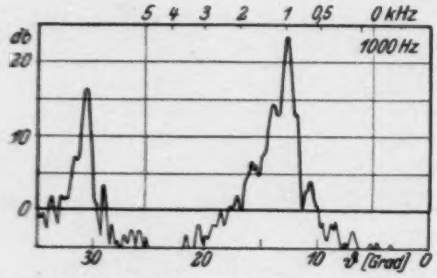

Abb. 14. Meßbeispiel: reiner Ton (1000 Hz)

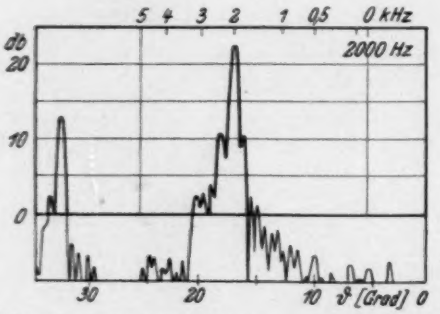

Abb. 15. Meßbeispiel: reiner Ton (2000 Hz)

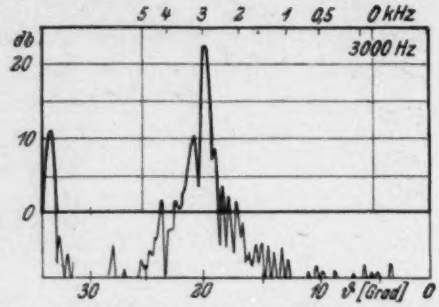

Abb. 16. Meßbeispiel: reiner Ton (3000 Hz)

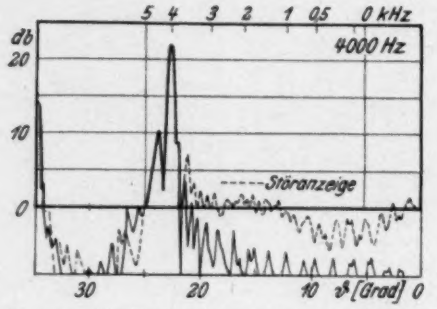

Abb. 17. Meßbeispiel: reiner Ton (4000 Hz)

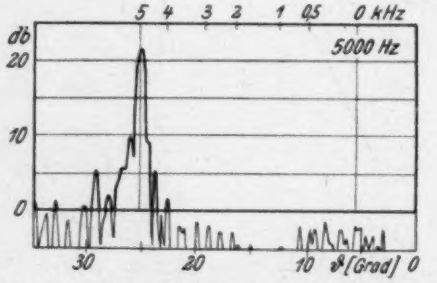

Abb. 18. Meßbeispiel: reiner Ton (5000 Hz)

auch der Abfall[12]) des Pegels außerhalb der Maxima entsprechend der gerechneten Kurve nach Abb. 11, besonders für die Interferenzen

In der Abb. 17 ist noch eine Störanzeige mit eingezeichnet. Diese verschwand nahezu durch Abdecken der Kante, an der die Folie über die nicht mit Absorptionsmaterial abgedeckte Seitenfläche des Rahmens gespannt ist (vgl. Kap. III). Diese Störanzeige trat immer dann auf, wenn eine geringe Frequenzerhöhung schon die nächste Ordnung, in unserem Beispiel die 9. Ordnung, bei kleinem Winkel zur Anzeige gebracht hätte.

[12]) Man erzielt einen wesentlich stärkeren Abfall des Pegels, wenn man noch eine zweite schalldurchlässige Folie vor der ersten Folie anordnet, so daß zwei Interferenzräume gleicher Dicke entstehen (vgl. E. Gehrcke und E. Lau, Multiplex-Interferenzspektroskop. Z. techn. Phys. 8 (1927), S. 157. Die Selektion, die man dann erhält, entspricht derjenigen beim Suchtonverfahren mit hochliegendem Bandfilter.

VI. Die Anwendung des Verfahrens zur Klanganalyse

Das beschriebene schallspektroskopische Verfahren kann zur Klanganalyse[13]) benutzt werden. Hierzu wird das Tonspektrum einem Ultraschallträger aufmoduliert und das obere Seitenband mit dem Schallspektroskop analysiert. Die Verwendung des oberen Seitenbandes ist darum zweckmäßig, weil den tiefen Hörschallfrequenzen die größeren Trennschärfen zugeordnet werden.

Der Modulator hatte folgenden Aufbau (s. Abb. 19). Zur Modulation diente ein Mischrohr (AH 100). Der Träger wurde durch eine Kompensationsschaltung[14]) vollständig unterdrückt. Hinter dem Mischrohr befand sich der Hochpaß, der nur das obere Seitenband durchließ. Dieses wurde nach nochmaliger Resonanzverstärkung dem Endrohr zugeführt. Durch die Resonanzverstärkung wird die zweite Harmonische des Trägers unterdrückt, die, wie sich experimentell zeigte, durch Differenztonbildung mit dem oberen Seitenband im Endrohr wieder das untere Seitenband in solcher Stärke erzeugte, daß ein unzureichend dimensioniertes Filter vorgetäuscht wurde.

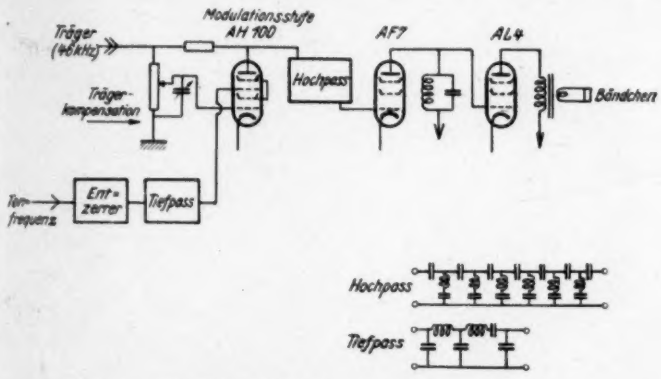

Abb. 19. Prinzipschaltung für den Modulator

Der Frequenzumfang des zu analysierenden Spektrums wird durch den Dispersionsbereich bestimmt, der, wie schon oben erwähnt, von der Plattendicke abhängt. Wenn das zu analysierende Spektrum nämlich größer ist als der Dispersionsbereich, würde sich eine Überdeckung der Anzeige in verschiedenen Ordnungen ergeben. Die Verhältnisse sollen für unseren speziellen Fall, wo die Plattendicke $d = 3$ cm betrug, in Abb. 20 kurz erläutert werden. In Abb. 20a sind auf der Abszisse die als Träger in Frage kommenden Ultraschallfrequenzen aufgetragen. Als Ordinate ist der Winkel angegeben, unter dem die Ultraschallfrequenz zur Anzeige gelangt. Durch die eingezeichneten Geraden kann man der Abbildung entnehmen, unter welchem Winkel und in welcher Ordnung eine vorgegebene Ultraschallfrequenz angezeigt wird. In unserem Falle haben wir die Anzeige 8. Ordnung benutzt und den Träger, wie eingezeichnet, bei 46,5 kHz gewählt, der bei 5,5° in 8. Ordnung zur Anzeige gelangen würde. Die dem Träger unmittelbar benachbarten Frequenzen des oberen Seitenbandes, die aus den tiefen Hörschallfrequenzen entstehen, haben dann wegen der kleinen Winkel, bei denen sie angezeigt werden, gute Trennschärfen. Der maximale Frequenzumfang, der zur Klanganalyse zur Verfügung stand, betrug in unserem Falle nur 5,7 kHz. Der Hoch- und Tiefpaß des Modulators wurden so dimensioniert, daß dieser Bereich auf 5 kHz ausgenutzt wurde (s. Abb. 20b). Als Hochpaß wurde eine sechsgliedrige Kette und als Tiefpaß ein zweigliedriges Filter benutzt. Die erzielte Flankensteilheit und der

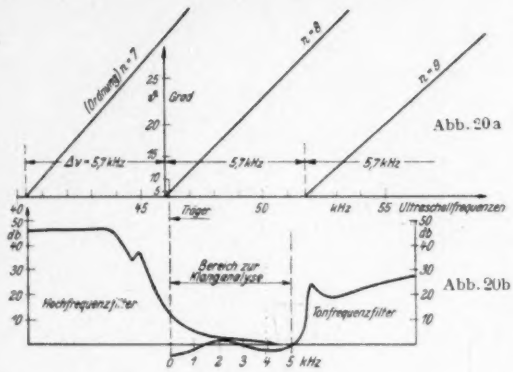

Abb. 20a. Graphische Darstellung zur Ermittlung der Winkel, unter denen eine Ultraschallfrequenz zur Anzeige gelangt

Abb. 20b. Übertragungskurven der Filter des Modulators

[13]) E. Meyer und E. Thienhaus, a. a. O.

[14]) W. Holle, Z. techn. Phys. 18 (1937), S. 312.

Dämpfungsverlauf der Filter ist aus Abb. 20b zu ersehen. Im allgemeinen würde man jedoch den Dispersionsbereich der Platte von vornherein so ausreichend wählen, daß nur ein geringer Aufwand an Siebmitteln erforderlich wäre.

Zum Ausgleich der gesamten Frequenzkurve der Anordnung wurde schließlich noch eine Entzerrerschaltung vor dem Tonfrequenzfilter vorgesehen.

Um die Verwendbarkeit des eben beschriebenen Plattenspektroskops nachzuweisen, wurden ein paar einfache Klanganalysen gemacht. In den Abb. 12—18 sind einige Meßbeispiele angegeben, die mit reinen Tönen bei Frequenzen von 100—5000 Hz erhalten wurden. Die Anzeige erfolgt etwa in dem Winkelbereich von 5°—25°. Bei größeren Winkeln wird schon die 7. Ordnung angezeigt, die, wie schon oben erwähnt, in den Abbildungen z. T. noch miteingetragen ist. Man kann aus den Abbildungen entnehmen, daß der Träger und das untere Seitenband recht gut unterdrückt und Störanzeigen vermieden sind.

In zwei weiteren Meßbeispielen wurden zwei obertonreiche Klänge mit einem Grundton von 500 bzw. 1000 Hz analysiert. Die Klänge wurden durch starke Übersteuerung einer Röhre erzeugt. In den Abb. 21 und 22a sind

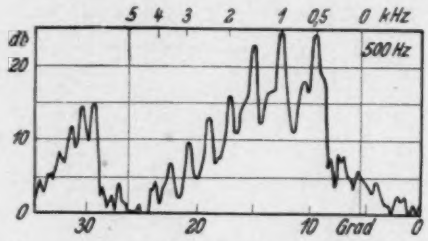

Abb. 21. Meßbeispiel: 500 Hz Klang

die registrierten Kurven angegeben, und man erkennt an ihnen, daß der Grundton sowie die höheren Teiltöne recht deutlich angezeigt werden. In den Abb. 22b und 22c ist für den 1000 Hz Klang die von uns immer verwendete logarithmische Anzeige auf linearen bzw. quadratischen Maßstab (Energie) umgezeichnet worden. Wir sehen daraus, daß die logarithmische Anzeige vorzuziehen ist.

Schließlich zeigt Abb. 23 noch das Spektrum einer Rauschplatte. Dieses enthält alle Frequenzen, deren Verteilung gesondert mit einem Hochtonanalysator, der mit konstanter Bandbreite arbeitet, bestimmt und in Abb. 23 als Spektralkurve der Rauschplatte miteingezeichnet wurde. Bringt man die Spektralkurve von der registrierten Kurve in Abzug, dann erhält man die eingetragenen Meßpunkte.

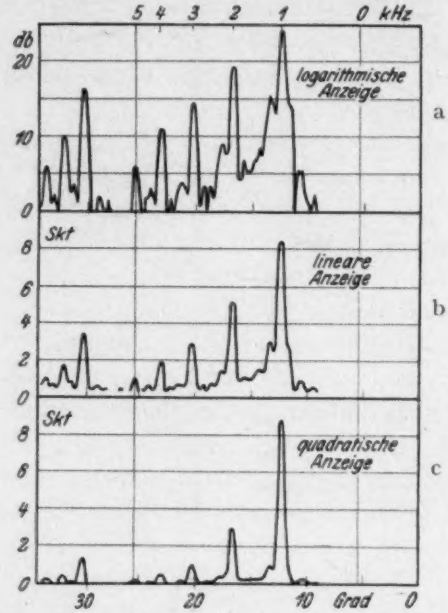

Abb. 22. Meßbeispiel: 1000 Hz Klang. Vergleich der logarithmischen, linearen und quadratischen Anzeige

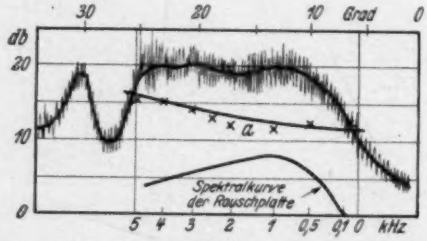

Abb. 23. Meßbeispiel: Spektrum einer Rauschplatte

Hätte die Interferenzspektroskopie eine konstante Trennschärfe, müßte nach dieser Korrektur die Anzeige über den Frequenzbereich konstant sein. Da die Trennschärfe mit zunehmendem Winkel aber schlechter wird, erhält man einen ansteigenden Verlauf. Der theoretisch[15]) zu erwartende Verlauf ist miteingezeichnet (Abb. 23 Kurve *a*).

[15]) C. H. Walter und E. Freystedt, Veröff. Geb. Nachr.-Techn. 5 (1935), S. 60.

VII. Die Schallabsorption in der Platte.

Bei der Diskussion der Meßergebnisse wurde schon erläutert, wie die Strahlschwächung mit Hilfe eines Spaltes experimentell bestimmt wurde. Die in der Abb. 24 eingetragene Kurve für η, die den angegebenen Trennschärfemessungen zugrunde lag, war gut reproduzierbar, hing aber bei größeren Winkeln von verschiedenen Einzelheiten der Anordnung ab, die nicht mehr systematisch untersucht werden konnten.

Nimmt man an, daß die Strahlschwächung im wesentlichen durch die Schallabsorption verursacht wird, so können wir aus der gemessenen Kurve für η nach Gl. (5) einen Absorptionskoeffizienten m bestimmen. Für $m = 7 \cdot 10^{-3}$ ergibt sich nach Gl. (5) für η ein Verlauf, der in Abb. 24 gestrichelt eingezeichnet wurde und der die gemessene Kurve für kleine Winkel, die uns für die Abschätzung der maximal erreichbaren Trennschärfe besonders interessieren, gut annähert. Unter Zugrundelegung dieses Wertes für den Absorptionskoeffizienten m ersieht man aus Gl. (16), daß keine wesentlich größeren Trennschärfen als unsere bei kleinen Winkeln ϑ gemessenen 50 Hz zu erwarten sind.

Wir wollen im folgenden noch kurz untersuchen, welche physikalischen Ursachen im wesentlichen den Absorptionskoeffizienten m bestimmen. Bei einwandfreiem Aufbau der Meßapparatur wird sich die Schallabsorption aus folgenden Anteilen zusammensetzen.

Für die Luftabsorption können wir etwa den Wert $m \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ ansetzen, der bei 50 kHz gemessen wurde und auch gut mit den von SCHMIDTMÜLLER[16]) und KNESER[17]) angegebenen Werten für mittlere Luftfeuchtigkeit übereinstimmt.

Ferner sind die Schluckgrade der Folie, die sich aus dem Schalldurchlässigkeitsgrad der Folie (0,25 v. H., auf Energie bezogen) und den Materialverlusten[18]) ergeben, so gering, daß sie gegenüber der Luftabsorption zu vernachlässigen sind.

Auch die Auskleidung der oberen und unteren Plattenbegrenzung mit Schluckstoff ergibt keinen wesentlichen Absorptionseinfluß, da die Höhe der Interferenzplatte (13 cm) gegen die Wellenlänge (0,7 cm) schon genügend groß

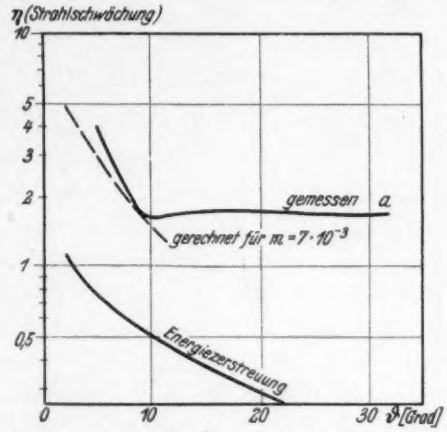

Abb. 24. Strahlschwächung η in Abhängigkeit vom Winkel ϑ

ist. Das wurde auch experimentell bestätigt, indem die Strahlschwächung durch die Auskleidung mit dem Schluckmaterial nicht meßbar geändert wurde[19]).

Nimmt man an, daß die Zylinderwelle, die der Bändchenstrahler in die Interferenzplatte einstrahlt, bei der Ausbreitung längs der Platte erhalten bleibt, so haben wir trotz der Energiezerstreuung mit $\frac{1}{R}$ (R = Strahlweg vom Bändchen gemessen) wegen der Abbildung durch den Zylinderspiegel im Brennpunkt gleiche Schalldruckamplitude für alle interferierenden

---

[16]) N. SCHMIDTMÜLLER, Akust. Z. 3 (1938), S. 115.

[17]) H. O. KNESER, Z. techn. Phys. 16 (1935), S. 213.

[18]) Eine nähere Betrachtung zeigt, daß auch sehr große Verlustwinkel des Folienmaterials keine wesentlichen Schluckgrade der Folien verursachen können. Es wurde auch versucht, die Materialverluste der Folien experimentell zu bestimmen. Nach der ersten Methode wurde die Dämpfung der Biegewellen, die von einem auf die Folie aufgesetzten Magnetostriktionsstab ausgehen, mittels einer Schallsonde für Ultraschallfrequenzen bestimmt. Nach der zweiten Methode wurden mittels eines von HENRICH entwickelten Gerätes, das sich besonders für die hohen Tonfrequenzen eignet (10 kHz), die Resonanzüberhöhungen eines aufgespannten Materialstreifens bestimmt. Für Zellophan z. B. ergaben sich bei Ultraschallfrequenzen sehr große Materialdämpfungen, die aber bei Tonfrequenzen nicht nachgewiesen werden konnten.

[19]) L. CREMER behandelt die Schallabsorption in Kanälen theoretisch und gibt auch für unseren Fall eine Abschätzung an. L. CREMER Akust. Z. 5 (1940), S. 57.

Strahlen. Unter dieser Annahme resultiert also keine zusätzliche, scheinbare Absorption. In unserem Falle ist aber wegen der Bändchenhöhe von nur 13 cm in größerer Entfernung ($R > 100$ cm) schon mit einer Energiezerstreuung mit $\frac{1}{R^2}$ entsprechend einer Kugelwelle zu rechnen. Die Energiezerstreuung ist also um einen Faktor $\frac{1}{R}$ größer als im Zylinderwellenfall, so daß sich eine zusätzliche Strahlschwächung $\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{R_0 + q \cdot s}{R_0}$ ergibt, wenn R_0 den Weg des ersten Strahls bedeutet. Dieser Verlauf von η ist für unseren Fall in der Abb. 24 miteingetragen. Man kann aus der Kurve entnehmen, daß durch die Energiezerstreuung eine mit der Luftabsorption vergleichbare scheinbare Absorption entsteht.

Die oben bei kleinen Winkeln gemessene Absorption $m = 7 \cdot 10^{-3}$ wird also durch die Luftabsorption $m \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ und durch die scheinbare Absorption durch Energiezerstreuung ($m = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$ für $\vartheta = 10^0$) — nahezu erklärt.

VIII. Die Phasenfehler

Bei der Diskussion des Schalldruckverlaufs eines Interferenzmaximums haben wir angenommen, daß die interferierenden Strahlen konstante Wegdifferenzen haben. In der vorliegenden Anordnung haben aber die Phasenfehler der interferierenden Strahlen die Interferenzmaxima verzerrt, da in bezug auf geometrisch-optische Fehlerfreiheit kein großer Aufwand getrieben wurde.

Die charakteristischen Auswirkungen der Phasenfehler können aus der Abb. 25 ersehen werden. Dort sind die Interferenzerscheinungen für einige Meßbeispiele zusammengestellt, die dadurch erhalten wurden, daß das Mikrophon um einige Δ cm dem Spiegel genähert bzw. von ihm entfernt wurde. Die Interferenzen erfahren dann eine unsymmetrische Verzerrung, indem die eine Flanke erhöht wird, während die andere eine Einsenkung erfährt, je nach dem Vorzeichen von Δ. Für eine bestimmte mittlere Stellung, die in Abb. 25 mit $\Delta = 0$ zusammenfällt, erhält man einen symmetrischen Verlauf.

Die Einstellung für diesen symmetrischen Verlauf der Interferenzen ist aber außerdem noch vom Winkel abhängig, wie man aus Abb. 26 entnehmen kann, wo diese Δ Werte auf den willkürlichen Wert $\Delta = 0$ bei $\vartheta = 17^0$ bezogen worden sind.

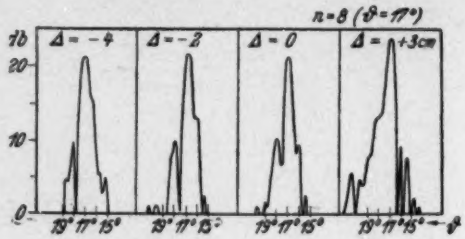

Abb. 25. Phasenfehler-Kompensation

Diese Winkelabhängigkeit erklärt sich dadurch, daß die von den Unregelmäßigkeiten der Interferenzplatte und des Spiegels herrührenden Phasenfehler im Falle des symmetrischen Verlaufs der Interferenzen mit den Phasenfehlern,

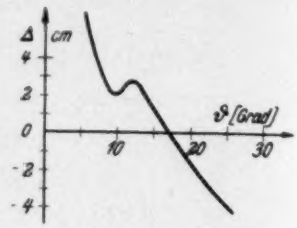

Abb. 26. Winkelabhängigkeit der zur besten Phasenfehlerkompensation erforderlichen Mikrophonverschiebung

die beim Herausrücken des Mikrophons aus dem Brennpunkt des Spiegels entstehen, kompensiert[20]) werden.

Dieser Kompensation sind aber Grenzen gesetzt. Aus den Abb. 12—18 erkennt man nämlich, daß bei kleineren Winkeln, wo der Einfluß der Phasenfehler größer wird, nach der besten Kompensation die Nebenmaxima höher liegen, als theoretisch zu erwarten ist. Das gleiche gilt in Abb. 9 mit wachsender Frequenz.

Experimentell ist auch von Bedeutung, daß man die Phasenfehler direkt messen kann. Man hat dann die Möglichkeit, den Einfluß von irgendwelchen geometrischen Abänderungen der Anordnung zu verfolgen. Unter dem Phasenfehler $\varphi(x)$ ist im folgenden die Phasendifferenz eines Strahls mit der resultierenden Phase aller

[20]) Die Möglichkeit der eben beschriebenen Phasenfehlerkompensation läßt sich aus der Theorie der Gittergeister erklären.

Strahlen im Hauptmaximum zu verstehen, wobei x den Austrittsort des Strahls aus der Platte festlegt.

$\varphi(x)$ wurde einmal direkt bestimmt. Hierzu wurde zuerst der Spiegel auf ein Hauptmaximum eingestellt. Dann wurden mit einem Spalt verschiedene Strahlbündel längs der Platte ausgeblendet und die Phasenlage mit und ohne Spalt mit einem Phasenschieber gemessen. Die gemessenen Phasenfehler $\varphi(x)$ sind für einen bestimmten Fall in Abb. 27a in Abhängigkeit von x aufgetragen.

Zweitens wurden die Phasenfehler für denselben Fall auch dadurch bestimmt, daß mit

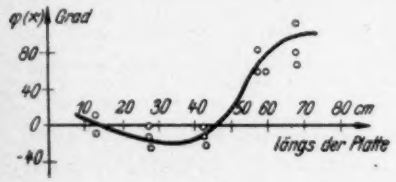

Abb 27a

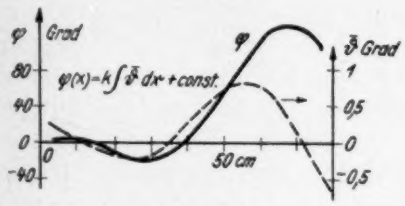

Abb. 27b

Abb. 27a, b. Nach zwei Methoden experimentell bestimmte Phasenfehler $\varphi(x)$

und ohne Spalt die Winkelstellung des Spiegels auf maximale Anzeige eingestellt und die Verlagerung des Maximums $\bar{\vartheta}$ (gestrichelte Kurve in Abb. 27b) aus der Winkeldifferenz ermittelt wurde. Aus $\bar{\vartheta}$ wurde unter Benutzung von $\varphi(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \int \bar{\vartheta}\, dx$[21]) der Phasenfehler errechnet und in Abb. 27b eingetragen.

Vergleicht man die Werte für $\varphi(x)$ in Abb. 27a und 27b, so erhält man einigermaßen Übereinstimmung. Die zugehörige Interferenzlinie, die sich bei diesen Phasenfehlern ergibt, ist in Abb. 27c eingezeichnet. Die stark unsymmetrischen Verzerrungen[22]) ließen sich noch durch Verschieben des Mikrophons kompensieren (vgl. oben).

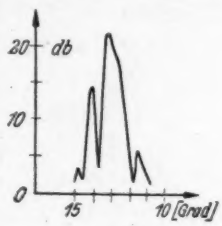

Abb. 27c. Interferenzmaximum mit den zu a und b gehörigen Phasenfehlern

Die Phasenfehler müssen sich in der Hauptsache auf die geometrischen Unvollkommenheiten der Anordnung zurückführen lassen.

Durch die Neigung des parabelförmigen Zylinderspiegels gegen die Zeichenebene werden keine zusätzlichen Phasenfehler verursacht, da die parallelen Strahlen, wie man zeigen kann, auch dann noch fehlerfrei zum Schnitt kommen. Der Spiegel ist auch mit solcher Genauigkeit hergestellt worden, daß nur Abweichungen von einigen 0,1 mm von der Parabelform in Rechnung zu setzen sind, die in erster Näherung um den doppelten Betrag fehlerhafte Strahlwege ergeben.

Die Planparallelität der Interferenzplatte wurde optisch nachgeprüft. Hierzu wurde die Platte visuell durch die Mitte eines Kreuzes anvisiert und der Gesichtswinkel ε ($\varepsilon < 10^{-3}$) ermittelt, unter dem die beiden Spiegelbilder erscheinen. Aus der Verteilung von ε längs der Platte konnten die Phasenfehler rechnerisch abgeschätzt werden.

Zusammenfassung

Von E. Meyer und E. Thienhaus wurde erstmalig ein schallspektroskopisches Verfahren, das speziell ein Beugungsgitter benutzte, zur Klanganalyse verwandt. — Der Vorteil des Verfahrens besteht in der kurzen Einschwing-

[21]) Diese Beziehung leitet sich wie folgt ab: Längs der Spaltbreite kann man eine konstante Zunahme $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ des Phasenfehlers $\varphi(x)$ annehmen. Zwei aufeinanderfolgende Strahlen treten im Abstand $2\,d\,\mathrm{tg}\,\vartheta$ (vgl. Abb. 3) längs der Platte aus, so daß ihre Phasendifferenz um $\Delta\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot 2\,d\,\mathrm{tg}\,\vartheta$ verändert wird. Nach Gl. (3) erzeugt aber eine Winkeländerung ϑ eine Änderung der Phasendifferenzen α um $\Delta\alpha = -2\,d \sin\vartheta \cdot \vartheta \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$. Aus der Bedingung $\Delta\alpha + \Delta\varphi = 0$ folgt durch Integration die oben angegebene Beziehung für $\varphi(x)$.

[22]) Das Ansteigen der Phasenfehler am Ende der Interferenzplatte fällt für die Verzerrungen nicht so stark ins Gewicht, da in diesem Bereich die Strahlschwächung schon sehr groß ist.

zeit des Spektrums im Gegensatz zum Suchtonverfahren. — In der vorliegenden Arbeit wird statt des Beugungsgitters das aus der Optik bekannte Plattenspektroskop (Perot-Fabry; Lummer-Gehrcke-Platte) auf akustische Verhältnisse übertragen. Die entwickelte Apparatur wird in ihrem Aufbau und ihrer Wirkungsweise beschrieben.

Zur Klanganalyse wird der Hörschall einem Ultraschallträger (45 kHz) aufmoduliert und das obere Seitenband mit dem Plattenspektroskop analysiert. Meßbeispiele werden angegeben. Für die tiefen Hörschallfrequenzen wurden etwa 60 Hz Trennschärfe erreicht. Trennschärfe und Schalldruckverlauf der Interferenzmaxima wurden in guter Übereinstimmung mit der Theorie gefunden.

Um festzustellen, in welchem Maße die Trennschärfe durch Schallabsorption in der Platte begrenzt wird, werden die verschiedenen Anteile der Schallabsorption abgeschätzt. Schließlich wird der charakteristische Einfluß der Phasenfehler diskutiert.

Die vorliegende Arbeit wurde im Institut für Schwingungsforschung ausgeführt. Herrn Prof. Dr. ERWIN MEYER möchte ich für die Stellung der Aufgabe und viele Anregungen herzlichst danken. *(Eingegangen am 29. Januar 1941.)*

Zur Theorie ebener Druckwellen mit steiler Front

Von H. Pfriem, VDI

Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof Institut für motorische Arbeitsverfahren und Thermodynamik

(Mit 10 Textabbildungen)

Übersicht

Bei Druckwellen von verhältnismäßig großer Schwingungsweite stellen sich praktisch nach einer bestimmten Laufzeit stets steile Wellenfronten ein. In diesen kann die Dämpfung besonders hoch sein. Die Vorgänge beim Übergang einer stetigen Welle zur unstetigen werden an einem einfachen Beispiel dargelegt. Die Gesetze für derartige Druckwellen mit steiler Front werden für nicht zu große Schwingungsweite (z. B. Ultra-Schallwellen in idealen Gasen) entwickelt.

I. Einführung

Druckwellen mit verhältnismäßig großer Schwingungsweite in Gasen sind im Maschinenbau recht häufig. Man denke nur an die Vorgänge in längeren Saug- und besonders in den Auspuffleitungen von Motoren[1]) oder in den Frischdampfleitungen von Dampfmaschinen[2]). Außerdem sind sie aber vor allem auch in der Schieß- und Sprengtechnik als Mündungs-, Geschoß- und Sprengknalle von großer Bedeutung. Alle derartigen Druckwellen gehen nach bekannten Gesetzen[3]) meist schon nach kurzer Laufzeit in eine Welle mit sehr steiler Front über und laufen mit dieser dann über große Strecken weiter.

Als eine besondere Art dieser Druckwellen mit steiler Front ist noch die Detonationswelle zu nennen, bei der in der Wellenfront zusätzlich eine chemische Umsetzung der Gase stattfindet. Während nun die Eigenschaften der stationären Detonationswelle praktisch geklärt sind[4]), ist dies für nichtstationäre Detonationswellen noch nicht vollständig gelungen. Die nichtstationären Zustände müssen aber vor allem bei der Entstehung von Detonationswellen bis zu ihrem stationären Aufbau durchlaufen werden; sie

[1]) Vgl. z. B. TH. SCHMIDT, Schwingungen in Auspuffleitungen von Verbrennungsmotoren. Forsch. Ing.-Wes. 5 (1934), S. 226.

[2]) Vgl. z. B. H. KÜTTNER, Druckschwankungen in Dampfleitungen schnellaufender Kolbendampfmaschinen. Forsch. Ing.-Wes. 10 (1939), S. 109.

[3]) Vgl. z. B. H. PFRIEM, Die ebene ungedämpfte Druckwelle großer Schwingungsweite. Forsch. Ing.-Wes. 12 (1941), Heft 1, S. 51—64; hier noch weitere Literaturstellen.

[4]) Vgl. z. B. H. PFRIEM, Die stationäre Detonationswelle in Gasen. Forsch. Ing.-Wes. 12 (1941), Heft 3, S. 143—158; hier weitere Literaturstellen.

wären technisch besonders für die etwaige Verhinderung der Entwicklung von Detonationswellen wichtig.

Entsprechend der praktischen Bedeutung der Druckwellen mit steilen Fronten wurde ihre Berechnung in der Literatur schon vielfach behandelt[5]). Dabei wurden jedoch meist nur die Gesetzmäßigkeiten der steilen Front betrachtet. Hier stellt sich infolge der sehr schnellen, stoßartigen Verdichtung des Gases, trotzdem sie im ganzen gesehen adiabatisch erfolgt, ein verhältnismäßig großer Verlust an mechanischer Energie ein, die der Druckwelle entzogen und in Wärme verwandelt wird. Der genaue physikalische Vorgang bei diesem Stoßverlust ist bisher nicht vollständig bekannt; es dürfte sich hierbei im wesentlichen um molekulare Vorgänge handeln, die vermutlich auch mit den für die gegenseitige Umwandlung der kinetischen Energien eines Gasmoleküles — der translatorischen und rotatorischen Energien sowie der innermolekularen Schwingungsenergien — notwendigen endlichen Umwandlungszeiten zusammenhängen. Unter Berücksichtigung der Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit hat R. Becker[6]) die Steilheit und Frontbreite des stationären Verdichtungsstoßes berechnet. Er findet dabei eine mit dem Druckverhältnis wachsende Versteifung der Front derart, daß die Frontbreite in atmosphärischer Luft schon etwa beim Druckverhältnis 1:8 geringer als die mittlere freie Weglänge der Moleküle ist. Daraus ergibt sich, daß man trotz der in Wirklichkeit stets endlichen Steilheit der Front eines Verdichtungsstoßes, praktisch doch meist eine verschwindende Breite des Bereiches der gesamten Drucksteigerung annehmen darf.

Die rechnerische Bestimmung der Gesetzmäßigkeiten einer solchen steilen Front kann unabhängig von den molekularen Vorgängen in ihr lediglich auf Grund von gasdynamischen Zusammenhängen erfolgen. Die so ermittelten Gesetze der Wellenfront sind durch die Entwicklungen von R. Becker[6]) theoretisch und durch Versuche an stationären Verdichtungsstößen praktisch bestätigt worden[7]), so daß ihre Gültigkeit auch den folgenden Entwicklungen zugrunde gelegt werden darf.

Die wesentlichste Folge eines, dem noch stetigen Teil einer Druckwelle vorausgehenden Verdichtungsstoßes ist nun in der laufenden, nicht umkehrbaren Verwandlung der in der Welle gespeicherten mechanischen Energie in Wärme zu sehen. Dadurch wird die Welle auf ihrem Weg immer kleiner und verschwindet schließlich ganz. Im Gegensatz zu den bisher bekannten Arten einer Dämpfung erfolgt aber diese Vernichtung von mechanischer Energie ausschließlich in der steilen Front der Welle. Praktisch treten daneben natürlich auch die normalen Formen der Wellendämpfung durch Wärmeleitung, Strahlung, Zähigkeit usw. auf; ihre Vernachlässigung in den folgenden Entwicklungen führt daher zu einem idealen Grenzfall, der nur zur besonderen Hervorhebung der Eigenheiten einer unstetigen Wellenfront gerechtfertigt ist.

An Stelle der ursprünglich in der Druckwelle gespeicherten mechanischen Energie ist nach deren Vernichtung die Temperatur der Gasatmosphäre entsprechend erhöht. Da nun im allgemeinen die Höhe der steilen Wellenfront von Gasteilchen zu Gasteilchen verschieden ist und die Vernichtung von mechanischer Energie mit dieser Höhe der Front wächst, kann sich also zunächst auch keine gleichmäßige Verteilung dieser Verlustwärme und damit der Temperatur des Gases einstellen. Es bleibt daher nach dem Durchgang einer ortsveränderlichen steilen Wellenfront zunächst ein ortsveränderliches Temperaturfeld im Gasraum bestehen, das — im wesentlichen auf Grund der endlichen Wärmeleitfähigkeit und Konvektion des Gases — im Laufe der Zeit eine gleichmäßige Verteilung der Verlustwärme bewirkt.

[5]) Vgl. z. B. R. Rüdenberg, Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Impulsstärke von Verdichtungsstößen. Artill. Mh. 1916, Nr. 113, S. 237 bis 265, und Nr. 114, S. 285—316; hier weitere Literaturstellen.

[6]) R. Becker, Stoßwelle und Detonation. Z. Phys. 8 (1922), S. 321—362, insbesondere S. 334—347.

[7]) Vgl. z. B. A. Stodola, Z. VDI. 47 (1903), S. 1, und R. Rüdenberg, a. a. O., S. 307—308 u. 313 bis 315.

Die zu dieser Verteilung notwendigen Zeiten sind jedoch bei dem vielfach sehr geringen Temperaturgefälle so groß im Vergleich zur Laufzeit der Welle, daß man in den meisten praktischen Fällen diese nachträgliche Energiezerstreuung ganz vernachlässigen kann; sie ist bei den im Bereich normaler Druckwellen vorliegenden Aufgaben auch meist bedeutungslos. Dagegen ist die Ortsveränderlichkeit der Gasatmosphäre für die der Stoßstelle nachfolgenden stetigen Wellenteile einer Druckwelle meist nicht vernachlässigbar, da hierdurch ihre Form mit beeinflußt wird.

In den folgenden Betrachtungen werden nun zunächst die an sich bekannten Gesetze einer unstetigen Wellenfront noch einmal kurz entwickelt. Darauf werden die ebenfalls bekannten Zusammenhänge für eine stetige Druckwelle von beliebiger Schwingungsweite in einer homogenen Gasatmosphäre bei Vernachlässigung ihrer Wärmeleitfähigkeit, Zähigkeit und sonstiger Dämpfungsursachen kurz abgeleitet. Die Verbindung beider Gesetzmäßigkeiten liefert dann eine Beschreibung der Vorgänge bei der Entstehung einer unstetigen Wellenfront aus einer ebenen Druckwelle von besonderer Form. Hieraus lassen sich die Gesetzmäßigkeiten für den Übergang von beliebigen stetigen Druckwellen in Gasstöße entwickeln. Es ergeben sich dabei so verwickelte Abhängigkeiten, daß eine einfache Beschreibung dieser Vorgänge nur noch in Sonderfällen möglich ist. Am Beispiel einer ursprünglich harmonischen Schallwelle wird dann der Dämpfungseinfluß der versteiften Wellenfront berechnet.

Nachstehend werden also zuerst die Gesetze einer unstetigen Wellenfront entwickelt.

II. Die Gesetze einer unstetigen Wellenfront[8])

1. Grundgleichungen.

Einem Gasteilchen, das einen Verdichtungsstoß durchläuft, wird von außen weder Wärme noch Arbeit zugeführt oder entzogen. Daher erhält man nach dem Satz von der Erhaltung der Energie bei horizontaler Strömung für seine Zustände vor und nach dem Stoß die Beziehung:

$$(1) \qquad i_n - i_v = \frac{A}{2g}(u_n - u_v)\,[2w - (u_n - u_v)]\,,$$

wobei bedeuten:

i	(kcal/kg)	die Enthalpie der Gewichtseinheit des Gases im betrachteten Gasteilchen,
u	(m/sec)	die absolute Eigengeschwindigkeit eines Gasteilchens,
w	(m/sec)	die relative Geschwindigkeit (Wellengeschwindigkeit) des Verdichtungsstoßes im Gas, das mit der Geschwindigkeit u_v strömt,
A	(kcal/mkg)	das mechanische Wärmeäquivalent und
g	(m/sec²)	die Erdbeschleunigung;

die Zeiger v bzw. n kennzeichnen jeweils die Zustände unmittelbar vor bzw. nach der Stoßstelle. Für ideale Gase ergibt sich hieraus mit $i = c_p \,.\, T + i_0$, $A\,R = c_p - c_v$, $\varkappa = c_p/c_v$ und $g\,\varkappa\,R\,T = a^2$ die folgende Form:

$$(1a) \qquad \begin{aligned} g\,\varkappa\,R\,(T_n - T_v) &= a_n^2 - a_v^2 \\ &= \frac{(\varkappa - 1)}{2}(u_n - u_v)\,[2w - (u_n - u_v)]\,, \end{aligned}$$

wenn bedeuten:

c_p bzw. c_v	(kcal/kg °K)	die spezifischen Wärmen des Gases,
R	(m/°K)	die Gaskonstante,
T	(°K)	die absolute Temperatur des Gasteilchens und
$a = \sqrt{g\,\varkappa\,R\,T}$	(m/sec)	der Schallzustand des Gasteilchens.

Für ideale Gase gilt außerdem die folgende Zustandsgleichung:

$$(2) \qquad P v = R\,T = \frac{a^2}{g\,\varkappa}\,,$$

wobei:

P	(kg/m²)	der Gasdruck und
v	(m³/kg)	das Volumen der Gewichtseinheit des Gases ist.

Daneben gilt für die Stoßstelle noch die Kontinuitätsgleichung

$$(3) \qquad \frac{w}{v_v} = \frac{1}{v_n}\,[w - (u_n - u_v)]\,.$$

[8]) Vgl. hierzu R. RÜDENBERG, Artill. Mh. 1916, Nr. 113, S. 237.

Schließlich muß für die Stoßstelle noch der Impulssatz gelten; es muß also sein:

$$P_n - P_v = \frac{1}{g v_v} \cdot w\,(u_n - u_v) = \frac{\varkappa P_v}{a_v^2} \cdot w\,(u_n - u_v)\,. \tag{4}$$

Bezeichnen alle Größen die Gaszustände unmittelbar vor und hinter der Stoßstelle, so behalten die Gleichungen praktisch auch dann noch Gültigkeit, wenn die Stoßstelle beispielsweise auf ihrem Weg immer wieder neue Zustände vorfindet, sofern die Zone der „plötzlichen" Zustandsänderungen so schmal ist, daß sie praktisch nur eine vernachlässigbar kleine Gasmenge einschließt. Dies trifft aber für alle größeren Gasstöße mit praktisch ausreichender Genauigkeit zu[9]). Die vorstehenden Beziehungen gelten daher praktisch auch für eine nichtstationäre[10]) steile Wellenfront.

Für praktische Berechnungen ist es zweckmäßig, die Gleichungen (1)—(4) algebraisch noch etwas umzuformen. Man erhält dann beispielsweise alle Zustandsgrößen nach dem Stoß in Abhängigkeit von der Wellengeschwindigkeit w.

$$u_n - u_v = \frac{2}{\varkappa + 1} \cdot \frac{w^2 - a_v^2}{w}; \tag{5}$$

$$a_n^2 - a_v^2 = 2\,\frac{\varkappa - 1}{(\varkappa+1)^2} \cdot \frac{(w^2 - a_v^2)\cdot(\varkappa w^2 + a_v^2)}{w^2} = g\varkappa R\,(T_n - T_v)\,; \tag{6}$$

$$P_n - P_v = \frac{2\varkappa}{\varkappa + 1}\,\frac{w^2 - a_v^2}{a_v^2}\,P_v\,; \tag{7}$$

$$v_n - v_v = \frac{-2\,v_v}{\varkappa + 1}\left[1 - \left(\frac{a_v}{w}\right)^2\right]. \tag{8}$$

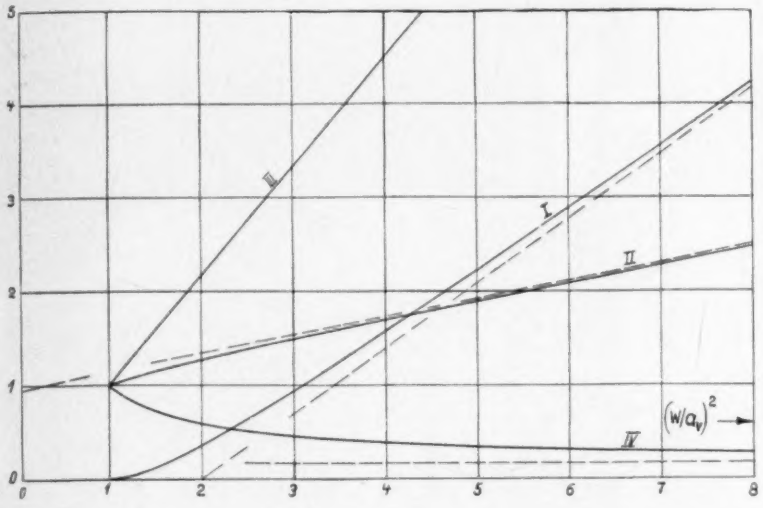

Abb. 1. Eigenschaften eines Verdichtungsstoßes in idealen Gasen in Abhängigkeit vom Quadrat des Verhältnisses der Wellengeschwindigkeit w zum Schallzustand a_v des Gases vor der Stoßstelle, dargestellt für $\varkappa = 1{,}4$.

Kurve I: $\left(\frac{u_n - u_v}{a_v}\right)^2 = f_1\left(\frac{w}{a_v}\right)^2$ nach Gl. 5,

Kurve II: $\left(\frac{a_n}{a_v}\right)^2 = \frac{T_n}{T_v} = f_2\left(\frac{w}{a_v}\right)^2$ nach Gl. 6,

Kurve III: $\frac{P_n}{P_v} = f_3\left(\frac{w}{a_v}\right)^2$ nach Gl. 7,

Kurve IV: $\frac{v_n}{v_v} = f_4\left(\frac{w}{a_v}\right)^2$ nach Gl. 8.

Die gestrichelten Geraden stellen die Asymptoten der Kurven dar

Diese vier Gleichungen (5)—(8) liefern also zu jedem Gaszustand vor einer Stoßwelle mit der Relativgeschwindigkeit w in eindeutiger Weise alle Gaszustände nach dem Stoß; in Abb. 1 sind diese in dimensionsloser Form für $\varkappa = 1{,}4$ in Abhängigkeit von $(w/a_v)^2$ anschaulich dargestellt.

Neben den vorstehenden Beziehungen ist thermodynamisch vor allem noch die Entropieänderung beim Stoß und die damit verbundene, nicht umkehrbare Umwandlung von mechanischer Energie in Wärme von Bedeutung. Die gesamte Entropiezunahme beim Verdichtungsstoß ist durch den Unterschied der Entropiezustände vor und nach dem Stoß gegeben. Die

[9]) Vgl. L. Prandtl, Z. Turbinenwes. **3** (1906), S. 241, und R. Becker, a. a. O., S. 344.

[10]) Jeder quasistationäre Verdichtungsstoß wird unabhängig von der Absolutgeschwindigkeit seiner Front in der vorliegenden Arbeit kurz als „stationär" bezeichnet, da er durch einfache additive Überlagerung einer entsprechenden Gasgeschwindigkeit ohne wesentliche Änderung seiner Eigenschaften tatsächlich stationär gemacht werden kann. Demnach wird hier als wesentliches Kennzeichen eines nichtstationären Verdichtungsstoßes die zeitliche Änderung aller seiner Eigenschaften angesehen.

Entropieänderung[11]) der Gewichtseinheit eines idealen Gases ist bei beliebiger Zustandsänderung ganz allgemein:

$$\Delta s = c_p\left[\ln\frac{T_n}{T_v} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\cdot\ln\frac{P_n}{P_v}\right] = c_p\left[\ln\left(\frac{a_n}{a_v}\right)^{\varkappa} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\ln\frac{P_n}{P_v}\right]. \tag{9}$$

Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik muß diese Änderung Δs der Entropie der Gewichtseinheit eines Gases beim Passieren eines Verdichtungsstoßes stets gleich oder größer als Null sein, wenn der Vorgang physikalisch möglich sein soll. Ersetzt man die Gaszustände in Gl. (9) durch die Wellengeschwindigkeit w nach Gl. (6) und (7), so findet man für die Entropievermehrung je Gewichtseinheit eines Gases vom ursprünglichen Zustand a_v, über das ein Verdichtungsstoß mit der Wellengeschwindigkeit w gelaufen ist, die Beziehung:

$$\frac{\Delta s}{c_p} = \ln\left\{1+\frac{2(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}\left[1-\left(\frac{a_v}{w}\right)^2\right]\left[\varkappa\left(\frac{w}{a_v}\right)^2+1\right]\right\} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\ln\left\{1+\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\left[\left(\frac{w}{a_v}\right)^2-1\right]\right\} = \frac{\Delta S\, v_v}{c_p\, w}, \tag{9a}$$

wenn $\Delta S\left(\frac{\text{Clausius}}{\text{m}^2\,\text{sec}}\right)$ die Entropievermehrung je Zeit- und Flächeneinheit der Wellenfront ist. In Abb. 2 ist diese Abhängigkeit durch Kurve I veranschaulicht.

Dieser Entropievermehrung entspricht auch eine nichtumkehrbare Umwandlung von mechanischer Energie in Wärme, die vermutlich von den Wellenteilen hinter der Stoßstelle aufgebracht werden muß.

2. Der Verlust an mechanischer Energie in einer steilen Wellenfront.

Die vorstehend zunächst vermutete Umwandlung von mechanischer Wellenenergie in Wärme soll nun noch rechnerisch genauer verfolgt werden.

Die Erfassung dieses Verlustes kann dadurch geschehen, daß man die zur Erhaltung eines Verdichtungsstoßes aufzuwendende Arbeit und unabhängig davon die im Gas gespeicherte mechanische Energie bestimmt. Der Unterschied beider Beträge stellt dann unmittelbar die Verlustenergie dar.

Bei nichtstationär laufenden steilen Wellenfronten ist es zweckmäßig, an Stelle der Arbeit

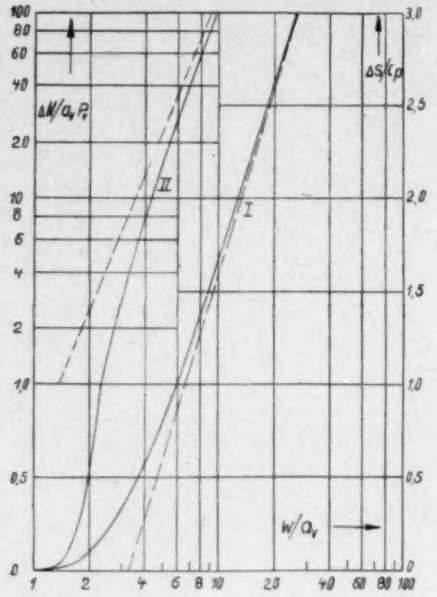

Abb. 2. Entropie-Vermehrung Δs und Leistungsverlust ΔN beim Gasstoß in Abhängigkeit vom Verhältnis der Wellengeschwindigkeit w zum Schallzustand a_v vor dem Stoß, dargestellt für $\varkappa = 1{,}4$.

Kurve I: $\frac{\Delta s}{c_p} = f_6\left(\frac{w}{a_v}\right)$ nach Gl. 9a, (rechter Ordinaten-Maßstab)

Kurve II: $\frac{\Delta N}{P_v \cdot a_v} = f_7\left(\frac{w}{a_v}\right)$ nach Gl. 13. (linker Ordinaten-Maßstab)

Die gestrichelten Geraden stellen die Asymptoten der Kurven dar.

Der Knick in Kurve II an der Stelle $\frac{\Delta N}{P_v\, a_v} = 1$ ist durch die Änderung des Ordinatenmaßstabes verursacht.

die Leistung, d. h. also die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit zu verwenden. Man erhält dann die zur Erhaltung einer solchen Unstetigkeitsstelle je Flächeneinheit der Wellenfront aufzuwendende Leistung N_E

$$N_E = P_n u_n - P_v u_v = \frac{w}{v_v}\left[\frac{c_v}{A}\left(T_n - T_v\right) + \frac{u_n^2 - u_v^2}{2g}\right] = \frac{w}{g v_v}\cdot\left[\frac{a_n^2 - a_v^2}{\varkappa(\varkappa-1)} + \frac{u_n^2 - u_v^2}{2}\right]. \tag{10}$$

[11]) Vgl. z. B. E. Schmidt, Einführung in die technische Thermodynamik, J. Springer (1936), S. 87.

Die je Gewichtseinheit eines Gases, das die Stoßstelle passiert hat, gespeicherte Arbeit L setzt sich aus der statischen Energie — also der durch adiabatische Ausdehnung wieder gewinnbaren Arbeit — und der Strömungsenergie der Gasteilchen zusammen. Man erhält also[11]):

$$L = \frac{P_n v_n}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{P_v}{P_n}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] + \frac{u_n^2 - u_v^2}{2g}.$$

Damit wird dann die in der Zeiteinheit je Flächeneinheit der Front eines Verdichtungsstoßes gespeicherte mechanische Energie in den von ihm erreichten Gasteilchen:

$$N_S = L\,\frac{w}{v_v} = \frac{w}{v_v}\cdot\left\{\frac{R\,T_n}{\varkappa-1}\left[1-\left(\frac{P_v}{P_n}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] + \frac{u_n^2-u_v^2}{2g}\right\}. \tag{11}$$

Die Verlustleistung ΔN je Flächeneinheit der Front eines Gasstoßes ergibt sich nun als Unterschied zwischen der zu seiner Erhaltung notwendigen Leistung N_E nach Gl. (10) und der in den erreichten Gasteilchen je Zeiteinheit gespeicherten mechanischen Energie N_S nach Gl. (11).

$$\Delta N = N_E - N_S = \frac{w}{g\,v_v\,\varkappa\,(\varkappa-1)}\left[a_n^2\left(\frac{P_v}{P_n}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - a_v^2\right] = \frac{c_v}{A}\left[T_v' - T_v\right]\frac{w}{v_v}, \tag{12}$$

wobei

$$T_v' = T_n\left(\frac{P_v}{P_n}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\ (^0K)$$

diejenige Temperatur ist, die das durch Stoß verdichtete Gas bei verlustfreier adiabatischer Ausdehnung auf seinen Anfangsdruck P_v erreichen würde.

Damit ist zugleich auch der Nachweis geliefert, daß die durch den Gasstoß vernichtete mechanische Energie ihren Gegenwert in einer entsprechenden Erhöhung der inneren thermischen Energie des Gases hat.

Ersetzt man in Gl. (12) noch die Gaszustände a_n und P_n nach dem Stoß an Hand der Gl. (6) und (7) durch die Wellengeschwindigkeit w, so findet man die nachstehende dimensionslose Beziehung für die Verlustleistung beim Gasstoß:

$$\frac{\Delta N}{P_v\,a_v} = \frac{1}{\varkappa-1}\,\frac{w}{a_v}\left\{\left[1-2\left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)^2 + 2\,\frac{\varkappa-1}{(\varkappa+1)^2}\left\{\varkappa\left(\frac{w}{a_v}\right)^2 - \left(\frac{a_v}{w}\right)^2\right\}\right]\left[\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\left(\frac{w}{a_v}\right)^2 - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1\right\}. \tag{13}$$

Diese Abhängigkeit ist in Abb. 2 durch Kurve II für $\varkappa = 1{,}4$ anschaulich dargestellt. Man erkennt daraus, daß die Leistungsverluste beim Gasstoß für wachsende Wellengeschwindigkeiten erheblich ansteigen und bei kleiner Wellengeschwindigkeit — entsprechend kleinen Verdichtungsstößen — sehr schnell verschwindend klein werden. Setzt man $w = a_v + \Delta w$, wobei Δw genügend klein gegenüber a_v sein soll, so wird die Verlustleistung bei Vernachlässigung kleiner Glieder höherer Ordnung:

$$\frac{\Delta N}{P_v\,a_v} \cong \frac{4\,(\varkappa-1)\,(2\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}\cdot\left(1+\frac{\Delta w}{a_v}\right)\left(\frac{\Delta w}{a_v}\right)^2; \tag{13a}$$

dabei ist $\left(\frac{\Delta w}{a_v}\right)^3 \ll 1$ vernachlässigt.

Die Verlustleistung verschwindet also mit dem Quadrat des Unterschiedes Δw der Wellengeschwindigkeit von der Schallgeschwindigkeit a_v des Gases vor dem Stoß.

Nachdem damit die Eigenschaften eines Verdichtungsstoßes bekannt sind, sollen nachstehend noch kurz die Gesetze einer stetigen, ebenen und ungedämpften Druckwelle von beliebiger Schwingungsweite in idealen Gasen entwickelt werden.

III. Die ebene ungedämpfte Druckwelle

1. Differentialgleichungen und Lösung.

In einem früheren Bericht[12]) konnten die an sich bekannten Gesetze für eine ungedämpfte ebene Druckwelle in einem idealen Gas durch Verwendung des Schallzustandes sehr anschaulich dargelegt werden. Derartige Druckwellen müssen der Eulerschen Bewegungsgleichung, der Kontinuitätsbedingung und dem Satz von der Erhaltung der Energie genügen. Dabei kann für einzelne Druckwellen im unbegrenzten Gasraum an Stelle der Eulerschen Differentialgleichung auch der Impulssatz verwendet werden.

Neben der Zustandsgleichung 2 erhält man für die Berechnung ungedämpfter Druckwellen

[12]) H. Peiem, Die ebene ungedämpfte Druckwelle großer Schwingungsweite. Forsch. Ing.-Wes. 12 (1941), Heft 1, S. 51—64; hier noch weitere Literaturangaben.

durch Verwendung des Schallzustandes an Stelle der Temperatur auf Grund der EULERschen Differentialgleichung nach einfachen Umformungen die nachstehende Beziehung:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2}{\varkappa - 1} a \frac{\partial a}{\partial x}. \tag{14}$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet dann:

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} + u \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{\varkappa - 1}{2} a \frac{\partial u}{\partial x}; \tag{15}$$

hierin bedeuten:

τ (sec) die Zeit und

x (m) die Koordinate eines Raumpunktes.

Der erste Hauptsatz der Wärmelehre lautet bei Vernachlässigung von Verlustwärmen:

$$d i - A v d P = 0, \tag{16}$$

oder für ideale Gase mit Hilfe der Zustandsgleichung 2 nach einfachen Umformungen:

$$\frac{d P}{P} + \frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{d a}{a} = 0; \tag{16a}$$

$$\text{bzw.: } \frac{P}{P_v} = \left(\frac{a}{a_v}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}} = \left(\frac{T}{T_v}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = \left(\frac{v_v}{v}\right)^{\varkappa}.$$

An Stelle von Gl. (14) kann man für einzelne Druckwellen nach dem Impulssatz setzen:

$$\pm d u = g \frac{v d P}{a} = \frac{g}{A} \frac{d i}{a} = \frac{2}{\varkappa - 1} d a; \tag{17}$$

$$\text{bzw.: } u - u_v = \pm \frac{2}{\varkappa - 1} (a - a_v).$$

Der Zeiger v deutet hier einen beliebigen Bezugszustand an; das positive Vorzeichen gilt dabei für eine in Richtung positiver Teilchengeschwindigkeiten u laufende Welle, das negative Zeichen für die entgegengesetzte Richtung.

Mit Hilfe der Gl. (17) gehen die beiden Gl. (14) und (15) in die folgende Form über:

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} + (u \pm a) \frac{\partial a}{\partial x} = 0;$$

oder:

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} \pm \left[a_v + \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} (a - a_v) \pm u_v\right] \cdot \frac{\partial a}{\partial x} = 0. \tag{18}$$

Die Gleichungen (16a), (17) und (18) beschreiben also in Verbindung mit der Zustandsgleichung (2) und den zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen eindeutig jede ebene ungedämpfte Druckwelle in einer einseitig unbegrenzten Atmosphäre. Für den homogenen Gasraum bietet die Integration dieser Gleichungen keine Schwierigkeiten, da hierbei a_v und u_v unveränderlich sind. Man erhält dann als allgemeine Lösung für das Schallzustandsfeld eine Beziehung von folgender Form:

$$x = (u \pm a) \tau + \varphi(a), \tag{19}$$

wenn $\varphi(a)$ eine beliebige Funktion des Schallzustandes a darstellt. Alle anderen Zustände der Druckwelle ergeben sich damit nach den Gl. (16a) und (17).

Im Fall einer durch die Verlustwärme einer steilen Wellenfront veränderten Gasatmosphäre ist die Integration allgemein nicht ohne weiteres möglich, da die Veränderungen selbst wieder von der Form der Druckwelle abhängen und außerdem auch die Voraussetzung einer einfachen Druckwelle fraglich ist. Für die stetigen Teile der Druckwelle erscheint die Gasatmosphäre dabei im allgemeinen sowohl örtlich veränderlich — infolge der ortsveränderlichen Höhe der steilen Wellenfront — als auch zeitveränderlich, da die hintereinander liegenden, von steilen Wellenfronten verschiedener Höhe überfahrenen Gasteilchen infolge ihrer Eigengeschwindigkeit u nacheinander die gleichen Raumpunkte passieren. Um daher zunächst einmal Einblick in die Vorgänge bei der Entstehung steiler Wellenfronten aus stetigen Druckwellen zu erhalten, soll nur ein Sonderfall beschrieben werden, bei dem eindeutig feststeht, daß es sich in allen Phasen stets nur um eine einzelne stetige Druckwelle in einer homogenen Gasatmosphäre handelt. Zuvor sollen jedoch noch einige Eigenschaften der unstetigen Druckwelle zur besseren Veranschaulichung der Zusammenhänge mit den entsprechenden von stetigen Druckwellen verglichen werden.

2. Vergleich der Eigenschaften von stetigen und unstetigen Druckwellen.

Ein Vergleich zwischen den Eigenschaften stetiger und unstetiger Druckwellen kann in verschiedener Weise erfolgen. Im Hinblick auf die späteren Anwendungen sollen hier zunächst einmal zwei Druckwellen betrachtet werden, deren Gasteilchen stetig bzw. stoßartig von verschiedenen Anfangszuständen auf den gleichen Schallzustand und die gleiche Eigengeschwindigkeit verdichtet wurden. Die

Wellenteile der stetig aufgebauten Druckwelle laufen bekanntlich mit der absoluten Geschwindigkeit $\pm a + u$, also mit der Summe aus der Schall- und Eigengeschwindigkeit ihrer Gasteilchen, während die Front eines Verdichtungsstoßes mit der absoluten Geschwindigkeit $w + u_v$ läuft. Es ist daher von Bedeutung, wie groß diese beiden Werte für Gasteilchen unmittelbar hinter einem Gasstoß sind. An Hand der Gl. (5) und (6) findet man nun für ihr Verhältnis die folgende Beziehung:

$$\frac{a_n + u_n}{w + u_v} = \frac{a_v}{w + u_v}\left[\sqrt{1 + \frac{2(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}\left[\left(\frac{w}{a_v}\right)^2 - 1\right]\left[\varkappa + \left(\frac{a_v}{w}\right)^2\right]} + \frac{u_v}{a_v} + \frac{2}{\varkappa+1}\left(\frac{w}{a_v} - \frac{a_v}{w}\right)\right]. \tag{20}$$

In Abb. 3 ist diese Abhängigkeit durch Kurve I für $\varkappa = 1{,}4$ und $u_v = 0$ anschaulich dargestellt. Man erkennt, daß die absolute Geschwindigkeit eines unmittelbar auf eine Stoßstelle folgenden stetigen Wellenteiles immer größer ist als die absolute Geschwindigkeit des Gasstoßes[13]). Dieser schreitet daher stets in die Druckwelle hinein und kann sie auf diese Weise allmählich vernichten. Für größere Druckstöße wird dabei das Verhältnis beider Geschwindigkeiten praktisch unveränderlich. Für eine beliebige größere Druckwelle mit steiler Front bedeutet dies, daß die Front immer im gleichen Verhältnis langsamer als die dahinter folgenden stetigen Wellenteile fortschreitet.

Ein anderer Vergleich zwischen stetigen und unstetigen Druckwellen ist bezüglich des Verhältnisses der Änderung des Schallzustandes zur Änderung der Eigengeschwindigkeit eines Gasteilchens möglich. Bei stetig aufgebauten Druckwellen ist nach Gl. (17) dieses Verhältnis:

$$\frac{\frac{2}{\varkappa-1}(a - a_v)}{u - u_v} = 1;$$

es ist also bei beliebigen Änderungen des Schallzustandes unveränderlich.

Für Gasteilchen, die eine Stoßwelle passiert haben, wird dagegen:

$$\frac{\frac{2}{\varkappa-1}(a_n - a_v)}{u_n - u_v} = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\,\frac{\sqrt{1 + \frac{2(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}\left[\left(\frac{w}{a_v}\right)^2 - 1\right]\left[\varkappa + \left(\frac{a_v}{w}\right)^2\right]} - 1}{\frac{w}{a_v} - \frac{a_v}{w}}. \tag{21}$$

In Abb. 3 ist auch diese Funktion durch Kurve II für $\varkappa = 1{,}4$ veranschaulicht. Man erkennt daraus, daß bei Stoßwellen dieses Verhältnis stets größer als 1 ist und für sehr große Druckstöße einem festen Grenzwert zustrebt. Im Gegensatz zur Kurve I nach Gl. (20) ergibt sich aber eine wagrechte Tangente im Punkt $\frac{w}{a_v} = 1$; für entsprechend kleine Stoßwellen erhält man daher praktisch in guter Näherung die gleiche Abhängigkeit wie bei stetigen Druckwellen.

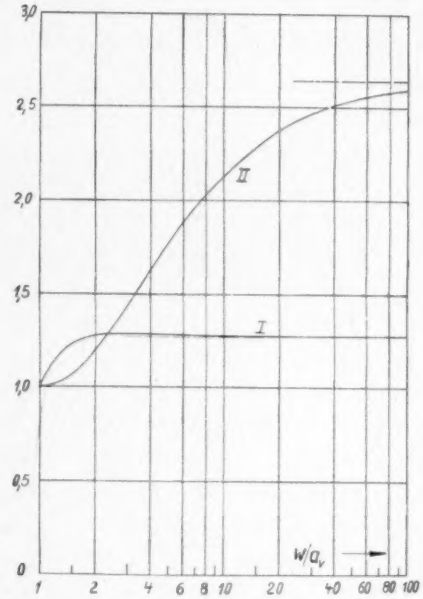

Abb. 3. Vergleich der Eigenschaften von stetigen Druckwellen und Stoßwellen bei der Verdichtung der Gasteilchen von verschiedenen Anfangszuständen auf gleichen Schallzustand und gleiche Eigengeschwindigkeit, dargestellt für $\varkappa = 1{,}4$.

Kurve I: $\frac{a_n + u_n}{w} = f_0\left(\frac{w}{a_v}\right)$ nach Gl. 20, (mit $u_v = 0$)

Kurve II: $\frac{\frac{2}{\varkappa-1}(a_n - a_v)}{u_n - u_v} = f_1\left(\frac{w}{a_v}\right)$ nach Gl. 21.

Die gestrichelten wagerechten Geraden stellen die Asymptoten der Kurven dar

[13]) Vgl. hierzu: B. Riemann, Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Gött. Abh. 8 (1860), Ges. Werke, 2. Aufl. (1892), S. 43—65.

Vergleicht man nun stetige und unstetige Druckwellen, deren Gasteilchen vom gleichen Anfangszustand auf den gleichen Enddruck verdichtet wurden, so findet man zunächst für das Verhältnis der Änderung ihrer Eigengeschwindigkeiten nach den Gl. (16a) und (17) bzw. (5) und (7) die Beziehung:

$$(22)\qquad \frac{u-u_v}{u_n-u_v}=\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\,\frac{\left(\frac{P}{P_v}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}-1}{\frac{P}{P_v}-1}\sqrt{1+\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\left(\frac{P}{P_v}-1\right)}.$$

In Abb. 4 ist diese Funktion durch Kurve I für $\varkappa = 1{,}4$ veranschaulicht. Man erkennt daraus, daß bei gleichem Druckverhältnis $\frac{P}{P_v}$ die Änderung der Eigengeschwindigkeit bei stetigen Druckwellen stets kleiner ist als die bei Verdichtungsstößen. Bei Druckwellen mit steiler Front müssen nun die von ihr gelieferte Eigengeschwindigkeit der Gasteilchen und deren Gasdruck unmittelbar in die gleichen Eigenschaften der dem Stoß folgenden stetigen Wellenteile übergehen. Daraus ergibt sich die später noch angewandte Schlußfolgerung, daß beim Übergang eines stetigen Teiles einer Druckwelle in den entsprechenden Teil einer steilen Wellenfront das Druckverhältnis stets kleiner als das des ursprünglichen stetigen Wellenteiles sein muß, da andernfalls die Stetigkeit des Überganges zu den der Stoßstelle noch folgenden stetigen Wellenteilen nicht gewahrt werden kann.

Vergleicht man mit derselben Voraussetzung — gleiche Anfangszustände und gleiche Enddrücke der Gasteilchen — auch die stetig bzw. unstetig erreichten Schallzustände der Gasteilchen, so erhält man an Hand der Gl. (16a) bzw. (6) und (7) die Beziehung:

$$(23)\qquad \frac{a-a_v}{a_n-a_v}=\frac{\left(\frac{P}{P_v}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}-1}{\sqrt{1+\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\left(\frac{P}{P_v}-1\right)\left[1+\frac{2}{2\varkappa+(\varkappa+1)\left(\frac{P}{P_v}-1\right)}\right]}-1}.$$

In Abb 4. ist diese Abhängigkeit durch Kurve II für $\varkappa = 1{,}4$ anschaulich dargestellt. Daraus ergibt sich, daß bei gleichen Gasdrücken auch die Unterschiede der Schallzustände bei stetiger Verdichtung stets kleiner als bei stoßartiger Verdichtung sind.

Mit den bisherigen Überlegungen ist es nun möglich, den einfachsten Fall des Überganges einer stetigen Druckwelle in eine Stoßwelle rechnerisch zu verfolgen.

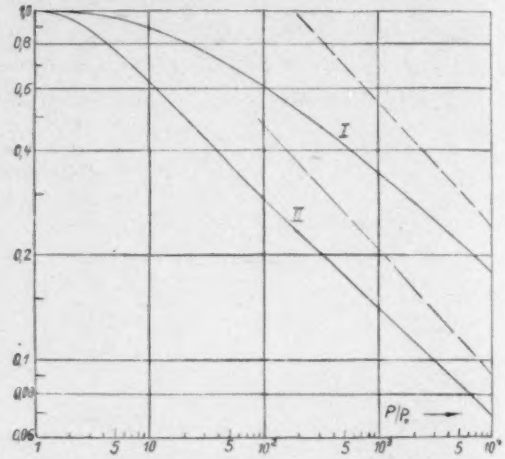

Abb. 4. Vergleich der Eigenschaften von stetigen Druckwellen und Stoßwellen bei gleichen Anfangszuständen und gleichen Enddrücken der Gasteilchen, dargestellt für $\varkappa = 1{,}4$.

Kurve I: $\frac{u-u_v}{u_n-u_v}=f_0\left(\frac{P}{P_v}\right)$ nach Gl. 22.

Kurve II: $\frac{a-a_v}{a_n-a_v}=f_1\left(\frac{P}{P_v}\right)$ nach Gl. 23.

Die gestrichelt eingezeichneten Geraden stellen die Asymptoten der Kurven dar

IV. Die plötzliche Entstehung eines Verdichtungsstoßes im homogenen Gasraum

1. Voraussetzungen und Lösung für die stetige Druckwelle.

Für die folgenden Überlegungen wird angenommen, daß ein Kolben in einem sehr langen gasgefüllten Rohr derart beschleunigt wird, daß sich vor ihm eine Druckwelle ausbildet, die auf der Vorderseite eine lineare Abhängigkeit des Schallzustandes vom Ort aufweist.

Die Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit des Gases soll dabei ganz vernachlässigt werden. Nach Ablauf einer bestimmten Zeit τ_e soll sich dann der Kolben unbeschleunigt mit seiner gerade bestehenden Geschwindigkeit weiterbewegen. Die vor ihm im Gasraum aufgebaute Druckwelle hat dann im Schallzustandsfeld die Form eines Trapezes (s. Abb. 5a), dessen Grundlinien dauernd wachsen, wobei der vordere Schenkel im Laufe der Zeit immer steiler wird.

Zum Aufbau einer derartigen Druckwelle muß sich der Kolben nach früheren Entwicklungen[14]) mit einer Geschwindigkeit u_K bewegen, die bei anfänglich mit der Geschwindigkeit u_v im Rohr bewegtem Gas der folgenden Gleichung entspricht, wenn zu allen Zeiten $\tau \leq 0$ auch der Kolben die Geschwindigkeit u_v aufweist.

$$(24)\quad u_K = \frac{2\,a_v}{\varkappa-1}\left\{\left[1-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\frac{\tau}{B\,a_v}\right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}-1\right\}+u_v;\qquad 0\leq\tau\leq\tau_e$$

dabei ist:

B (sec²/m)	eine unveränderliche Größe,
a_v (m/sec)	der Schallzustand der homogenen Atmosphäre und
τ_e (sec)	die Zeitdauer der Kolbenbeschleunigung.

Für $\tau \geq \tau_e$ läuft der Kolben dann mit der unveränderlichen Geschwindigkeit:

$$(24a)\quad u_{Ke} = \frac{2\,a_v}{\varkappa-1}\left\{\left[1-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\frac{\tau_e}{B a_v}\right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}-1\right\}+u_v.$$

Die Gleichung für die Vorderseite der im Gasaum entstehenden Druckwelle (26a) lautet dann im Schallzustandsfeld[15]):

$$(25)\quad x=\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a-\frac{2}{\varkappa-1}a_v+u_v\right)\tau-B\,a_v(a-a_v).$$

Diese Beziehung gilt nur im Bereich der stetigen Vorderseite der Druckwelle also für $x_e \leq x \leq (a_v+u_v)\,\tau$ (s. Abb. 5a), wenn bedeutet:

$$(25a)\quad x_e=\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}a_e-\frac{2}{\varkappa-1}a_v+u_v\right)\tau - B\,a_v(a_e-a_v)$$

und

$$(25b)\quad a_e = a_v+\frac{\varkappa-1}{2}(u_{Ke}-u_v) = a_v\cdot\left[1-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\frac{\tau_e}{B\,a_v}\right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}.$$

Für $x \leq x_e$ wird $a = a_e = \text{konst}$.

Das zugehörige Druckfeld der Welle erhält man aus Gl. (16a) mit Hilfe der vorstehenden Gl. (25).

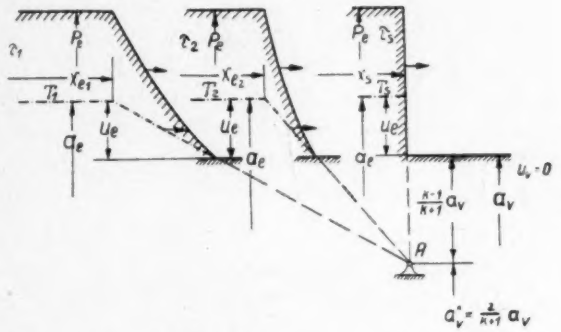

Abb. 5a. Verschiedene Formen einer stetigen Druckwelle mit linear vom Ort abhängigem Schallzustand zu verschiedenen Zeitpunkten $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ vor dem Auftreten des Verdichtungsstoßes

Nach Gl. (17) erhält man ferner mit Gl. (25) für die Eigengeschwindigkeit der Gasteilchen die Beziehung:

$$(26)\quad u = u_v + 2\,\frac{(a_v+u_v)\,\tau - x}{(\varkappa-1)\,B\,a_v-(\varkappa+1)\,\tau}.$$

$$x_e \leq x \leq (a_v+u_v)\,\tau.$$

Für $x \leq x_e$ wird danach also mit Gl. (25a) und (25b):

$$u = u_e = \frac{2\,a_v}{\varkappa-1}\left\{\left[1-\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\frac{\tau_e}{B\,a_v}\right]^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}-1\right\}+u_v.$$

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit dieser Lösung durch Einsetzen in die Differentialgleichungen (14) und (15) bzw. (18), und erkennt, daß sie auch die Randbedingung an der Oberfläche des Kolbens erfüllt, wo die Geschwindigkeit der Gasteilchen stets gleich derjenigen der Kolbenoberfläche sein muß. Für die Steilheit der Vorderseite dieser Druckwelle findet man nach Gl. (25) die Beziehung:

$$(27)\quad \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau - B\,a_v}.$$

[14]) H. Pfriem, a. a. O., Anm. 12, S. 57 Gl. 25. Vgl. auch H. Hugoniot, J. école polyt. H. 58 (1889), S. 1—125 insbes. S. 53.

[15]) H. Pfriem, a. a. O., Anm. 12, Gl. 26. von einer Konstanten abgesehen.

Die Steilheit der Vorderseite der Druckwelle ist also im Schallzustandsfeld ganz entsprechend der Voraussetzung in allen Punkten gleich und erweist sich nur als veränderlich mit der Zeit; sie wird unendlich für:

$$\tau = \tau_s = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \cdot B a_v . \tag{27a}$$

Der zugehörige Ort ergibt sich damit nach Gl. (25) zu:

$$x = x_s = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \cdot B a_v (a_v + u_v) . \tag{27b}$$

In diesem Zeitpunkt τ_s bzw. Ort x_s geht also die zunächst stetige Wellenfront plötzlich in eine Stoßwelle mit völlig anderer Gesetzmäßigkeit über; die hierbei erreichte größte Steilheit der Front behält dann die weiterlaufende Welle bei.

Die Ermittlung des Ortes x_s des erstmaligen Eintritts einer Unstetigkeit kann leicht auch mit Hilfe des früher[16]) schon entwickelten zeichnerisch-mechanischen Verfahrens zur Bestimmung der Verformung einer Druckwelle im Schallzustandsfeld erfolgen. Danach besteht im Abstand $a = a^*_{v,e}$ von der Achse $a = 0$ im Schallzustandsfeld ein Punkt A in der geradlinigen Verlängerung der Vorderseite der Welle, der für die verschiedensten Neigungen stets gleich bleibt (s. Abb. 5a). Der Abstand $a^*_{v,e}$ ergibt sich dabei aus der Gleichung:

$$a^*_{v,e} = \frac{2}{\varkappa + 1} a_{v,e} \mp \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} u_{v,e} . \tag{28}$$

Damit kann man die Formänderungen einer beliebigen stetigen Druckwelle auch zeichnerisch verfolgen.

Nachstehend wird nun die Form der Druckwelle nach der Entstehung des Gasstoßes, also für Zeitpunkte $\tau > \tau_s$ bestimmt.

2. Der Übergang zum Verdichtungsstoß.

Alle Gasteilchen, die erstmalig in kürzester Zeit stoßartig verdichtet werden, erfahren dabei eine andere Zustandsänderung als diejenigen, die kurz zuvor noch stetig, also verlustfrei adiabatisch verdichtet wurden. Wie vorausgehend schon dargelegt, erhalten sie auf Kosten der mechanischen Energie der Druckwelle eine äquivalente Wärmemenge, so daß sich also ihre Endzustände von den kurz zuvor noch stetig und daher verlustfrei verdichteten Gasteilchen unterscheiden. Hinter der Stoßstelle müssen aber Druck und Eigengeschwindigkeit der Gasteilchen stetig in die entsprechenden Eigenschaften der bisher umkehrbar verdichteten Gasteilchen übergehen, wenn hier nicht noch weitere Unstetigkeiten entstehen sollen. Der Schallzustand bzw. die Temperatur und damit auch das spezifische Volumen der Gasteilchen dürfen dagegen beim Übergang von stetig verdichteten Teilchen auf solche, die unstetig verdichtet wurden, eine unstetige Änderung aufweisen, da voraussetzungsgemäß die Wärmeleitfähigkeit des Gases bei den vorliegenden Betrachtungen vernachlässigt werden soll.

Nach den früheren Überlegungen (s. Abb. 4) sind nun aber bei gleichem Druckverhältnis die Eigengeschwindigkeiten von Gasteilchen bei stetiger Verdichtung stets kleiner als die bei stoßartiger Verdichtung. Danach könnte der Übergang von Druck und Geschwindigkeit der Gasteilchen hinter der Stoßstelle dadurch erfolgen, daß alle Gasteilchen in der steilen Wellenfront auf einen über dem Höchstdruck der früheren stetigen Welle liegenden Gasdruck verdichtet werden und sich dann auf der Rückseite einer gleichgerichteten Überdruckwelle auf Druck und Geschwindigkeit der ursprünglichen Welle umkehrbar ausdehnen. Dieser theoretisch denkbare Fall scheidet bei normalen Druckwellen aus, da hierbei die in der Welle gespeicherte mechanische Energie — im Widerspruch zum Satz von der Erhaltung der Energie — von selbst dauernd wachsen würde. Er hat dagegen praktische Bedeutung für den Fall, daß die steile Front der Druckwelle plötzlich in eine Detonationswelle übergeht; dies soll jedoch an dieser Stelle nicht weiter verfolgt werden.

Eine weitere Möglichkeit des stetigen Überganges von Druck und Eigengeschwindigkeit der Gasteilchen hinter einer plötzlich entstehenden Stoßwelle besteht noch darin, daß die Gasteilchen in der unstetigen Wellenfront auf einen etwas unter dem Druck der ursprünglichen Welle liegenden Gasdruck derart ver-

[16]) H. PFRIEM, a. a. O., Anm. 12, Gl. 27a.

dichtet werden, daß ihre Eigengeschwindigkeit immer noch größer als die der früher stetig verdichteten Teilchen ist. Dadurch besteht für diese ein Druckgefälle in der Laufrichtung der Welle, das zu ihrer Beschleunigung auf die etwas höhere Eigengeschwindigkeit der stoßverdichteten Gasteilchen verfügbar ist (s. Abb. 5b). Es muß dann also der Übergang von einer stetigen Druckwelle in eine mit unstetiger Wellenfront die Ursache für eine Unterdruckwelle sein, die sich der ursprünglichen Welle

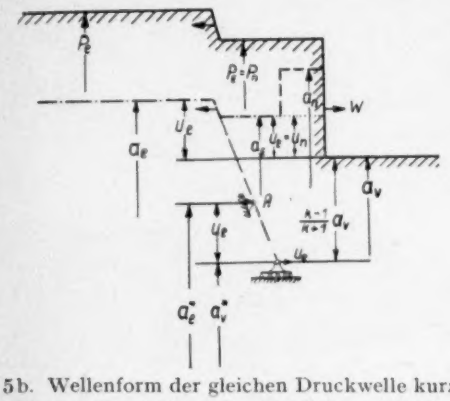

Abb. 5b. Wellenform der gleichen Druckwelle kurze Zeit nach der Entstehung des Verdichtungsstoßes.

überlagernd in entgegengesetzter Richtung wie diese ausbreitet. Man kann sich dies auch so vorstellen, daß die ursprüngliche Druckwelle beim Übergang zur Stoßwelle an der steilen Front teilweise reflektiert wird[16a]). Die einmal erreichte, in ihrer Höhe verminderte, steile Wellenfront läuft dann mit unveränderlicher Wellengeschwindigkeit im Gasraum weiter.

Die vorstehenden Überlegungen können für den betrachteten Sonderfall mathematisch noch einfach formuliert werden, da die zurücklaufende Unterdruckwelle vor sich wieder einen Gasraum vorfindet, der in allen Zuständen homogen ist.

[16a]) Vgl. hierzu auch K. Kobes, Die Durchschlaggeschwindigkeit bei Luftsauge- und Druckluftbremsen, Z. österr. Ing.- u. Architekten-Ver. 62 (1910), S. 553—579. Wie dem Verfasser erst während der Drucklegung bekannt wurde, ist hier auf S. 560 in Fußnote 17 die Reflexion einer Unterdruckwelle an der steilen Front des gerade entstehenden Verdichtungsstoßes kurz angedeutet.

3. Die Stoßwelle.

Für die Front der entstehenden Stoßwelle (vgl. Abb. 5b) gelten zunächst die Gl. (5) und (7).

Für die stetige Ausdehnung der Gase der ursprünglichen Druckwelle auf einen Druck $P_E < P_e$ bzw. einen Schallzustand $a_E < a_e$ entsprechend einer Geschwindigkeit $u_E > u_e$ müssen nach den Gl. (16a) und (17) die beiden folgenden Beziehungen gelten:

$$\frac{P_e}{P_E} = \left(\frac{a_e}{a_E}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}$$

und

$$u_E - u_e = \frac{2}{\varkappa-1}(a_e - a_E).$$

Um für den Druck und die Eigengeschwindigkeit der Gasteilchen einen stetigen Übergang von den durch die Stoßstelle erzwungenen Zuständen auf die entsprechenden der ursprünglichen Druckwelle zu erreichen, muß $P_E = P_n$ und $u_E = u_n$ sein. Hiermit ergibt sich nach der vorstehenden Beziehung in Verbindung mit Gl. (17) zunächst:

$$(29)\qquad \begin{aligned} a_E &= a_e - \frac{\varkappa-1}{2}(u_n - u_e) \\ &= 2a_e - \frac{\varkappa-1}{2}(u_n - u_v) - a_v. \end{aligned}$$

Damit erhält man schließlich das zur Beschleunigung der stetig verdichteten Gasteilchen verfügbare Druckverhältnis:

$$(30)\qquad \frac{P_e}{P_E} = \frac{P_e}{P_n} = \left[2 - \frac{\varkappa-1}{2}\cdot\frac{u_n - u_v}{a_e} - \frac{a_v}{a_e}\right]^{-\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}.$$

Da ferner das Druckverhältnis der ursprünglichen, stetigen Druckwelle $P_e/P_v = (a_e/a_v)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}$ ist, erhält man das Druckverhältnis der neu entstehenden, unstetigen Wellenfront in der Form:

$$\frac{P_n}{P_v} = \frac{P_n}{P_e}\cdot\frac{P_e}{P_v} = \left[\left(2 - \frac{\varkappa-1}{2}\frac{u_n - u_v}{a_e} - \frac{a_v}{a_e}\right)\frac{a_e}{a_v}\right]^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}.$$

Dieses Druckverhältnis der Stoßwelle muß aber vor allem der Gl. (7) genügen, so daß damit also die folgende Vorschrift erfüllt sein muß:

$$\left[2\frac{a_e}{a_v} - \frac{\varkappa-1}{2}\frac{u_n - u_v}{a_v} - 1\right]^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}} = 1 + \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\left[\left(\frac{w}{a_v}\right)^2 - 1\right].$$

Mit Hilfe der (Gl. 5) kann man diese Bedingung nun noch auf die folgende Form bringen:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\left(\frac{w}{a_v}\right)^2-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right]^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} + \frac{\varkappa-1}{2(\varkappa+1)}\left(\frac{w}{a_v}-\frac{a_v}{w}\right)+\frac{1}{2}=\frac{a_e}{a_v}. \tag{31}$$

Dies ist aber eine Beziehung zur Berechnung der Wellengeschwindigkeit w des entstehenden Verdichtungsstoßes zu einem vorgegebenen Schallzustand a_e der ihn erzeugenden, ursprünglich stetig aufgebauten Druckwelle. In Abb. 6 ist diese Abhängigkeit durch Kurve I für $\varkappa = 1{,}4$ dargestellt.

Anschaulicher werden die Vorgänge, wenn man die absolute Geschwindigkeit $w + u_v$ der Stoßstelle mit der Laufgeschwindigkeit $a_e + u_e$ der stetigen Druckwelle vergleicht; man findet dafür die Bezeichnung:

$$\frac{w+u_v}{a_e+u_e}=\frac{w+u_v}{a_v}\cdot\left[\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\frac{a_e}{a_v}-\frac{2}{\varkappa-1}+\frac{u_v}{a_v}\right]. \tag{31a}$$

Da w/a_v nach Gl. (31) als Funktion von a_e/a_v bekannt ist, kann damit zu vorgegebenen Werten von u_v der Quotient $(w + u_v)/(a_e + u_e)$ leicht berechnet werden; für $u_v = 0$ und $\varkappa = 1{,}4$ findet man so die in Abb. 6 durch Kurve II gegebene Abhängigkeit. Daraus erkennt man, daß die Wellengeschwindigkeit einer aus einer stetigen Druckwelle entstehenden Stoßwelle sowohl kleiner wie auch größer als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $a_e + u_e$ des ursprünglichen stetigen Wellenteils sein kann; dabei kann jedoch der doppelte Wert von $a_e + u_e$ nicht überschritten werden.

Da für die späteren Anwendungen im Gebiet der Schallwellen vor allem die kleinsten Werte der Wellengeschwindigkeit noch von Bedeutung sind, soll dafür an dieser Stelle noch eine Näherungsgleichung entwickelt werden. Zu diesem Zweck soll wieder gesetzt werden: $w = a_v + \Delta w$ und $a_e = a_v + \Delta a_e$ mit $\left(\frac{\Delta w}{a_v}\right)^2 \ll 1$ und $\left(\frac{\Delta a_e}{a_v}\right)^2 \ll 1$; dann ergibt sich bei Vernachlässigung von kleinen Gliedern zweiter Ordnung in guter Näherung an Stelle von Gl. (31):

$$\Delta w = \frac{\varkappa+1}{2(\varkappa-1)}\Delta a_e = \frac{1}{2}(\Delta a_e + \Delta u_e), \tag{31b}$$

wenn $\Delta u_e = u_e - u_v = \frac{2}{\varkappa-1}\Delta a_e$ (m/sec) die Änderung der Eigengeschwindigkeit der Gasteilchen in einer stetigen Druckwelle ist.

Daraus erkennt man, daß der Unterschied Δw der Wellengeschwindigkeit gegenüber der Schallgeschwindigkeit a_v bei einer genügend kleinen steilen Wellenfront im Vergleich zur entsprechenden Geschwindigkeitsänderung $\Delta a_e + \Delta u_e$ eines stetig verdichteten Wellenteils der ursprünglichen Druckwelle nur die Hälfte von dieser beträgt.

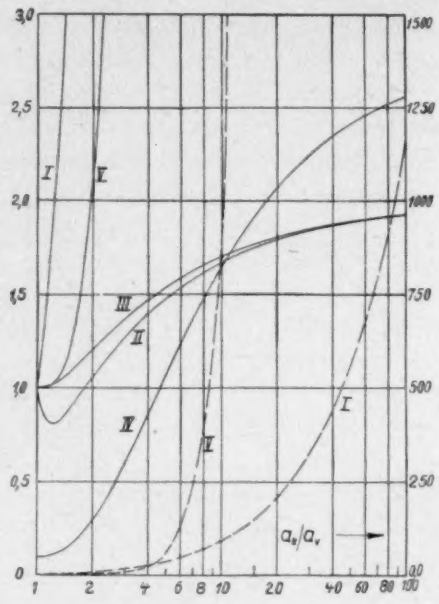

Abb. 6. Eigenschaften der Druckwelle mit steiler Front nach Abb. 5b für $\varkappa = 1{,}4$.

Kurven I: $\frac{w}{a_v}=f\left(\frac{a_e}{a_v}\right)$ nach Gl. 31,

Kurve II: $\frac{w}{a_e+u_e}=f\left(\frac{a_e}{a_v}\right)$ nach Gl. 31a (mit $u_v = 0$),

Kurve III: $\frac{u_n-u_v}{u_e-u_v}=f\left(\frac{a_e}{a_v}\right)$ nach den Gl. 5 u. 31,

Kurve IV: $\frac{1}{10}\left(\frac{a_n}{a_e}\right)^2=\frac{1}{10}\frac{T_n}{T_e}=f\left(\frac{a_e}{a_v}\right)$ nach den Gl. 6 und 31,

Kurven V: $\frac{P_e}{P_n}=f\left(\frac{a_e}{a_v}\right)$ nach den Gl. 7 und 31.

Für die ausgezogenen Kurven gilt jeweils der linke, für die gestrichelten Kurven dagegen der rechte Ordinatenmaßstab.

Die Kurven II und III haben gemeinsam die wagerechte Gerade $w/(a_e + u_e) = 2{,}0$ als Asymptote; die Kurve IV hat die nicht eingezeichnete wagerechte Gerade $\frac{1}{10}(a_n/a_e)^2 = \frac{1}{10}\cdot\frac{8\varkappa}{\varkappa-1} = 2{,}8$ zur Asymptoten

Neben der Wellengeschwindigkeit interessieren von der unstetigen Druckwelle auch noch die Gaszustände nach der Wellenfront. Da aber die Wellengeschwindigkeit nach Gl. (31) bekannt ist, können diese an Hand der Gl. (5) bis (8) ohne weiteres berechnet werden. In Abb. 6 sind die Eigengeschwindigkeiten u_n, die Schallzustände a_n und die Gasdrücke P_n nach der steilen Front im Vergleich mit den entsprechenden Zuständen der ursprünglich stetigen Druckwelle in den Kurven III, IV und V für $\varkappa = 1{,}4$ anschaulich dargestellt. Man erkennt an den wagrechten Tangenten dieser drei Kurven im Punkt $a_e/a_e = 1{,}0$ insbesondere, daß diese drei Eigenschaften der Stoßwelle bei kleineren Verdichtungsstößen in die von stetigen Druckwellen übergehen. Dies ist vor allem für Anwendungen im Bereich der Schallwellen von praktischer Bedeutung.

Wesentlich ist insbesondere noch die Erscheinung, daß die Temperatur bzw. der Schallzustand und die Eigengeschwindigkeit der Gasteilchen nach dem Verdichtungsstoß stets größer als die entsprechenden Eigenschaften von Gasteilchen der in den Gasstoß übergehenden stetigen Druckwelle sind, obwohl zugleich der in der Stoßwelle erreichte Gasdruck P_n immer kleiner als in der stetigen Druckwelle ist. Die äußerst starke Erhöhung der Temperatur — in Abb. 6 ist nur 1/10 des Verhältnisses T_n/T_e aufgetragen! —, die auf Kosten der Vernichtung von mechanischer Energie in der steilen Front erfolgt, kann bei derartigen Druckwellen in zündfähigen Gemischen unmittelbar die Entstehung einer Detonationswelle an Stelle des normalen Gasstoßes auslösen, auch wenn die in der stetigen Druckwelle erreichte Endtemperatur T_e allein die Zündung des Gemisches noch nicht veranlassen kann.

Nachdem so alle Eigenschaften des aus der stetigen Welle entstandenen Verdichtungsstoßes bekannt sind, soll nun noch die bei seiner Entstehung reflektierte stetige Druckwelle näher betrachtet werden.

4. Die reflektierte Druckwelle.

Aus den bisher dargelegten Vorgängen bei der plötzlichen Entstehung eines Verdichtungsstoßes aus einer stetigen Druckwelle ergibt sich, daß der oberste Teil dieser Welle im Augenblick der Erreichung der steilen Front sozusagen einbricht und als Unterdruckwelle in die hinter ihr gerade neu aufgebaute homogene Gasatmosphäre zurückläuft; in dieser haben alle Gasteilchen die gleiche unveränderliche Geschwindigkeit u_e, den Schallzustand a_e und den Gasdruck P_e. Die Unterdruckwelle muß daher wieder durch eine Beziehung von der Form der Gl. (19) darstellbar sein, wobei sich als zeitliche Anfangsbedingung für alle Zustände ein Stück einer vertikalen Geraden im Punkt $x = x_s$ ergeben muß. Als Randbedingungen bestehen ferner die Forderungen, daß sie am Anfang die durch den Zeiger e, am Ende die durch E gekennzeichneten Zustände aufweisen muß; dabei ist $P_E = P_n$ und $u_E = u_n$, aber $a_E \neq a_n$ und damit auch $T_E \neq T_n$ sowie $v_E \neq v_n$. Allen diesen Bedingungen genügen — wie man sich leicht überzeugt — in Verbindung mit der Gl. (16a) die beiden folgenden einfachen Beziehungen:

$$x = x_s + (u - a)\,(\tau - \tau_s)\,, \tag{32}$$

wobei $\tau \geq \tau_s$ und $a_E \leq a \leq a_e$ ist; x_s und τ_s ergeben sich nach den Gl. (27a) und (27b).

Ferner findet man entsprechend Gl. (17) (unteres Vorzeichen, da die Welle entgegen der Richtung positiver Eigengeschwindigkeiten u läuft!):

$$u - u_e = \frac{2}{\varkappa - 1}\,(a_e - a)\,. \tag{32a}$$

Damit erhält man für die Änderung des Schallzustandes mit dem Ort die Gleichung:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \cdot \frac{1}{\tau - \tau_s}\,; \qquad \tau > \tau_s\,. \tag{32b}$$

Die Steilheit der Unterdruckwelle ist also im Schallzustandsfeld für alle Punkte gleich groß und wird mit der Zeit immer geringer.

Die zeichnerische Bestimmung der Unterdruckwelle ist wieder sehr einfach, wenn man den unveränderlichen Drehpunkt der die Wellenrückseite beschreibenden Geraden bestimmt. Den neuen Abstand a_e^* dieses festen Drehpunktes von der Abszissenachse erhält man dabei wieder nach Gl. (28) (unteres Vorzeichen!).

Eine physikalische Erklärung für die teilweise Reflexion der Druckwelle im Augenblick der

Entstehung des Verdichtungsstoßes ergibt sich durch die Unstetigkeit, die sich als Folge des Gasstoßes in der Temperatur und damit der spezifischen Masse der Gasatmosphäre einstellt. Dadurch trifft sozusagen die ankommende Welle auf ihrem Weg plötzlich auf ein dünneres Medium und wird daher an der Grenzfläche teilweise zurückgeworfen. Trifft diese Unterdruckwelle auf ihrem Weg schließlich auf den mit der Geschwindigkeit $u_{Ke} = u_e$ bewegten Kolben, so wird sie an seiner Oberfläche vollkommen reflektiert[17]) und läuft dann in Richtung zur Front der Stoßwelle wieder zurück. Dabei werden die zuvor von der Geschwindigkeit u_e auf $u_E = u_n$ verlustfrei beschleunigten Gasteilchen ebenso verlustfrei wieder auf ihre ursprüngliche Geschwindigkeit $u_e = u_{Ke}$ verzögert. Da die steile Front der Stoßwelle, wie früher schon nachgewiesen wurde (s. Abb. 3, Kurve I), stets langsamer als ein beliebiger Impuls im Gasraum hinter ihr läuft, kann sie auch von der am Kolben reflektierten Unterdruckwelle eingeholt werden. Daher werden schließlich alle Gasteilchen der Stoßwelle wieder verlustfrei auf die Kolbengeschwindigkeit u_{Ke} verzögert, so daß auf diese Weise — von weiteren Störungen an der Wellenfront abgesehen — vor dem Kolben schließlich eine einfache Stoßwelle entsteht, ähnlich wie sie sich bei seiner plötzlichen Beschleunigung auf die Endgeschwindigkeit u_{Ke} sofort eingestellt hätte. Ein wesentlicher Unterschied besteht dabei nur in den Zuständen im Gasraum vor dem Kolben; während bei dem sofort an der Kolbenoberfläche entstehenden Verdichtungsstoß alle Gasteilchen die gleiche Gastemperatur T_n' aufweisen, besitzt bei dem hier betrachteten Fall der stetigen Kolbenbeschleunigung ein Teil des Gases unmittelbar vor dem Kolben die Temperatur $T_e < T_n'$, ein daran anschließender Teil die Temperatur $T_n > T_n'$ und endlich ein weiterer Teil mit stetigem Übergang bis zur steilen Wellenfront schließlich die Temperatur T_n'. Durch die sofort einsetzende Wärmeübertragung zwischen diesen Gasschichten wird aber schließlich nach einer vergleichsweise sehr langen Zeit auch hierbei eine gleichmäßige Temperaturverteilung erreicht.

Die vorstehenden Überlegungen haben zu einer klaren Vorstellung über die physikalischen Vorgänge beim plötzlichen Übergang einer besonders geformten stetigen Druckwelle in einen Gasstoß geführt. Nachstehend soll nun auch die allmähliche Änderung eines Verdichtungsstoßes durch kleine Druckwellen betrachtet werden.

V. Die stetige Änderung eines Verdichtungsstoßes

1. Überlagerung einer Elementardruckwelle.

Es soll zunächst angenommen werden, daß im Gasraum vor einem Kolben ein stationärer ebener Verdichtungsstoß besteht. Bei einer kleinen Änderung der gleichförmigen Geschwindigkeit des ihn erhaltenden Kolbens geht von diesem eine entsprechende kleine Druckwelle — eine sogenannte Elementardruckwelle — aus (s. Abb. 7), die in jedem Fall die steile

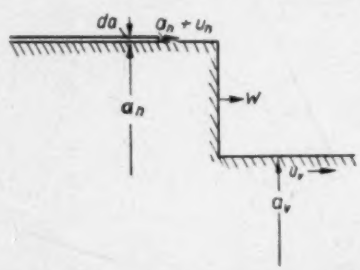

Abb. 7. Änderung eines stationären Gasstoßes durch eine überlagerte Elementardruckwelle

Front der Stoßwelle erreicht, da alle Störungen hinter ihr schneller laufen als sie selbst. Bei Ankunft dieser kleinen Druckwelle an der Front der Stoßwelle muß sich deren Wellengeschwindigkeit entsprechend ändern; außerdem muß aber die Elementardruckwelle auch teilweise reflektiert werden und wieder zurücklaufen, da mit einer Änderung der Wellengeschwindigkeit nach den vorstehenden Überlegungen eine größere Änderung der Eigengeschwindigkeit

[17]) Vgl. hierzu H. Pfriem, Reflexionsgesetze für ebene Druckwellen von großer Schwingungsweite, demnächst in Forsch. Ing.-Wes. 12 (1941), Heft 5 und H. Pfriem, Die gegenseitige Überlagerung ungedämpfter ebener Druckwellen großer Schwingungsweite, demnächst in dieser Zeitschrift.

der Gasteilchen und eine geringere Änderung des Druckes im Vergleich zu den entsprechenden Eigenschaften der Elementardruckwelle erwartet werden muß. Dies soll mit den folgenden Entwicklungen noch kurz nachgewiesen werden.

Nach Gl. (5) erhält man bei einer verschwindend kleinen Änderung dw der Wellengeschwindigkeit für die zugehörige Änderung du_n der Eigengeschwindigkeit der Gasteilchen die Beziehung:

$$du_n = \frac{2}{\varkappa+1}\left[1+\left(\frac{a_v}{w}\right)^2\right] dw. \tag{33}$$

Die entsprechende Änderung dP_n des Gasdruckes wird dabei nach Gl. (7):

$$dP_n = \frac{2\varkappa}{\varkappa+1} P_v \cdot \frac{2w}{a_v^2} dw. \tag{34}$$

Auf Grund dieser beiden Gleichungen ergibt sich für die gegenseitige Abhängigkeit von dP_n und du_n die Beziehung:

$$dP_n = \varkappa P_v \cdot \frac{2w}{a_v^2} \frac{du_n}{1+\left(\frac{a_v}{w}\right)^2}. \tag{35}$$

Bei einer stetigen Druckwelle ist die entsprechende Abhängigkeit durch Gl. (17) gegeben; läuft diese unmittelbar hinter einem Verdichtungsstoß (vgl. Abb. 7), so gilt dafür:

$$\frac{dP}{du} = \frac{a_n}{g \cdot v_n}$$

Zum einfachen Vergleich bringt man zweckmäßig Gl. (35) auf eine entsprechende Form:

$$\frac{dP_n}{du_n} = \frac{a_n}{g\,v_n} \cdot \left(\frac{v_n}{v_v}\right)\left(\frac{a_v}{a_n}\right)\left(\frac{w}{a_v}\right) \frac{2}{1+\left(\frac{a_v}{w}\right)^2} = \frac{dP}{du} \cdot \psi_1. \tag{35a}$$

Danach ergibt sich als wesentlicher Unterschied zwischen den Druck- und Geschwindigkeitsänderungen der steilen Wellenfront und einer sie einholenden Elementardruckwelle der Faktor ψ_1:

$$\psi_1 = \left(\frac{v_n}{v_v}\right) \cdot \left(\frac{a_v}{a_n}\right)\left(\frac{w}{a_v}\right) \cdot \frac{2}{1+\left(\frac{a_v}{w}\right)^2}. \tag{35b}$$

Ersetzt man hierin noch v_n und a_n durch w nach Gl. (6) und (8), so erhält man die Abhängigkeit dieses Faktors ψ_1 von der Wellengeschwindigkeit eines Gasstoßes, die in Abb. 8 anschaulich für $\varkappa = 1{,}4$ dargestellt ist. Man erkennt daraus, daß ψ_1 stets kleiner als 1 ist; das bedeutet aber nach Gl. 35a, daß bei gleicher Änderung der Eigengeschwindigkeiten der Gasteilchen die Druckänderung in einer Stoßwelle stets kleiner als in einer sie einholenden Elementardruckwelle ist. Es muß daher eine gegenseitige Angleichung der Zustände der Stoßwelle und der Elementardruckwelle in der Weise stattfinden, daß dieser Druckunterschied teilweise zur Beschleunigung (bzw. Verzögerung) der Gasteilchen auf eine etwas höhere (bzw. kleinere) Geschwindigkeit verwendet wird, ganz ähnlich wie im vorstehend behandelten Fall

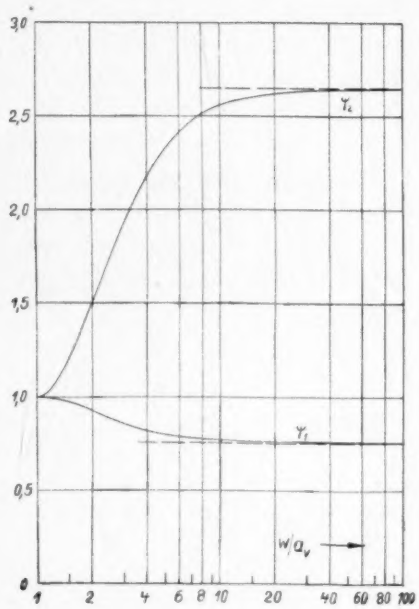

Abb. 8. Faktoren ψ_1 und ψ_2 nach den Gl. (35b) bzw. (36b) in Abhängigkeit vom Verhältnis der Wellengeschwindigkeit w einer Stoßstelle zur Schallgeschwindigkeit a_v der Gasatmosphäre

der plötzlichen Entstehung eines Verdichtungsstoßes. Dadurch muß andererseits aber auch eine rückwärtslaufende Elementarwelle auftreten, die man als die an der steilen Wellenfront teilweise reflektierte ankommende Elementardruckwelle auffassen kann.

Für genügend große Werte von $\frac{w}{a_v}$ findet man aus Gl. (35b) den Grenzwert:

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2(\varkappa-1)}{\varkappa}}, \quad \text{wenn } \left(\frac{w}{a_v}\right)^2 \gg 1 \text{ ist.} \tag{35c}$$

Für Werte von $\frac{w}{a_v} \approx 1$ erhält man andererseits:

(35d) $\psi_1 = 1$, wenn $\left(\frac{\Delta w}{a_v}\right)^2 = \left(\frac{w}{a_v} - 1\right)^2 \ll 1$ ist.

Daraus ergibt sich insbesondere, daß die einen genügend kleinen Verdichtungsstoß einholenden stetigen Druckwellen praktisch nicht mehr an ihm zurückgeworfen werden.

Neben der Reflexion der ankommenden Elementardruckwelle tritt aber außerdem noch als Folge des größeren Verlustes an mechanischer Energie in der etwas vergrößerten steilen Wellenfront auch eine entsprechende nicht umkehrbare Erhöhung des Schallzustandes bzw. der Temperatur der Gasteilchen unmittelbar nach dem Stoß ein, die nach Gl. (6) leicht bestimmt werden kann. Man findet danach für eine differentiale Änderung dw der Wellengeschwindigkeit der in einer homogenen Gasatmosphäre laufenden steilen Front die Beziehung:

$$(36)\quad a_n\, d\,a_n = \frac{2(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}\left[\varkappa + \left(\frac{a_v}{w}\right)^4\right] w\, d\, w = \frac{1}{2}\, g\varkappa R\, d\, T_n.$$

Ersetzt man hierin noch dw durch du nach Gl. (23), so erhält man in Verbindung mit Gl. (17):

$$(36a)\quad \frac{d\,a_n}{d\,u_n} = \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,\frac{\varkappa + \left(\frac{a_v}{w}\right)^4}{1+\left(\frac{a_v}{w}\right)^2}\cdot\left(\frac{w}{a_v}\right)\left(\frac{a_v}{a_n}\right) = \frac{d\,a}{d\,u}\,\psi_2,$$

wobei bedeutet:

$$(36b)\quad \psi_2 = \frac{2}{\varkappa+1}\,\frac{\varkappa + \left(\frac{a_v}{w}\right)^4}{1+\left(\frac{a_v}{w}\right)^2}\cdot\left(\frac{w}{a_v}\right)\left(\frac{a_v}{a_n}\right).$$

Die Funktion ψ_2 gibt das Vielfache der Schallzustandsänderung an, die bei gleicher Änderung der Eigengeschwindigkeit eines Gasteilchens bei Verdichtung durch Stoß gegenüber stetiger Verdichtung erreicht wird. In Abb. 8 ist diese Funktion ψ_2 anschaulich für $\varkappa = 1{,}4$ dargestellt.

Als Grenzwert für sehr große Werte von $\frac{w}{a_v}$ findet man:

$$(36c)\quad \psi_2 = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}},\quad \text{wenn } \left(\frac{w}{a_v}\right)^2 \gg 1 \text{ ist.}$$

Für Werte von $\frac{w}{a_v} \approx 1$ erhält man andererseits:

(36d) $\psi_2 = 1$, wenn $\left(\frac{\Delta w}{a_v}\right)^2 = \left(\frac{w}{a_v} - 1\right)^2 \ll 1$ ist.

Daraus ergibt sich insbesondere, daß bei genügend kleinen Gasstößen die Erhöhung des Schallzustandes der Gasteilchen als Folge des Verlustes an mechanischer Energie vernachlässigbar gering ist.

2. Druckwellen beliebiger Form mit steiler Front.

Denkt man sich eine stetige ebene Druckwelle von beliebiger Form hinter einer steilen Wellenfront in lauter kleinste Elementardruckwellen zerlegt — d. h. also durch eine entsprechend fein gestufte Treppenkurve ersetzt —, so holen diese die steile Wellenfront alle nacheinander ein. Dabei werden sie an ihr teilweise reflektiert, ändern in entsprechender Weise die Wellengeschwindigkeit der Front und den Schallzustand der Gasteilchen unmittelbar nach ihr. Die reflektierten Elementarwellen überlagern sich gegenseitig und mit den noch ankommenden Elementarwellen zu einer resultierenden Druckwelle, die mit den Beziehungen für eine einzelne Druckwelle nicht mehr beschrieben werden kann[18]). Dazu kommen außerdem noch die Änderungen des Schallzustandes der Gasteilchen als Folge der stetig veränderlichen Verlustleistung der Wellenfront, so daß die einem Verdichtungsstoß folgenden stetigen Wellenteile noch eine veränderliche Gasatmosphäre vorfinden.

Obwohl es nun trotz der vorstehenden Entwicklungen nicht möglich ist, eine einfache und genaue Beschreibung von beliebigen Druckwellen mit steiler Wellenfront zu geben, so ist zunächst doch eine physikalisch klare Vorstellung vom Ablauf der Vorgänge gewonnen. In Sonderfällen kann diese als Grundlage für die Entwicklung von Näherungslösungen mit technisch ausreichender Genauigkeit dienen.

[18]) L. Ehret versucht dies mit der Annahme eines Doppelsprunges, der offenbar den physikalischen Vorgängen im allgemeinen nicht gerecht wird. — Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung (Triebwerk), S. II 53. — Auch die Darlegungen von H. Schardin über die vor einem Geschoß im Lauf einer Waffe entstehende Druckwelle mit steiler Front stellen nur eine Näherung dar. — Dtsch. Jägerzeitung, Schießwesen, 100 (1933), S. 416—421.

Dies dürfte insbesondere für Druckwellen möglich sein, bei denen die der steilen Front folgenden stetigen Wellenteile von beschränkter Länge sind und nur allmähliche Zustandsänderungen aufweisen. Hierbei kann man in erster Näherung die an der Front reflektierte Druckwelle sowie die Änderung des Schallzustandes für alle Gasteilchen der Hauptwelle als gleich groß voraussetzen und hat dadurch wieder eine einfache Druckwelle.

Ein weiterer Sonderfall, der auf eine technisch brauchbare Näherungslösung führt, ergibt sich bei genügend kleiner Schwingungsweite der Druckwellen, die nachstehend auch kurz als Schallwellen bezeichnet werden. Dies soll mit den folgenden Entwicklungen noch näher ausgeführt werden.

VI. Schallwellen mit steiler Wellenfront

1. Grundlagen der Näherungslösung bei kleinsten Schwingungsweiten.

Nach den vorstehenden Ausführungen bildet die Funktion ψ_1 nach Gl. (35b) bzw. nach Abb. 8 die Grundlage zur Beurteilung der Reflexion von Elementardruckwellen an einer steilen Wellenfront. Bei einem genügend kleinen Verdichtungsstoß wird in guter Näherung $\psi_1 = 1$, was nach Gl. (35a) bedeutet, daß die Änderungen der Gasdrücke und Eigengeschwindigkeiten der Gasteilchen einer stetigen Druckwelle praktisch gleich jenen der Stoßwelle sind. Es findet dann keine Reflexion der Elementardruckwellen an der steilen Wellenfront statt, d. h. also die Schallwelle läuft trotz des Verdichtungsstoßes praktisch ungestört als Einzelwelle weiter.

Auch die Änderung des Schallzustandes der Gasteilchen nach einer steilen Wellenfront, die zur Verlustleistung in ihr verhältnisgleich ist, wird nach Gl. (36d) bzw. Abb. 8 für genügend kleine Stoßwellen verschwindend klein. Dies bedeutet, daß auch die der Stoßstelle folgende, beliebig geformte stetige Schallwelle praktisch wie in einer homogenen Gasatmosphäre läuft.

Die einzige Bedingung dafür, daß eine Schallwelle trotz steiler Front wie eine einfache Druckwelle behandelt werden darf, ist:

$$\left(\frac{w}{a_v} - 1\right)^2 \ll 1 .$$

Läßt man also beispielsweise einen Fehler von weniger als 1 v. H. zu, so muß nach Gl. (35b) stets $\frac{w}{a_v} < 1{,}1$ oder nach Gl. (6): $a_n/a_v < 1{,}034$ sein; nach Gl. (7) dürfen daher als größte Druckunterschiede der Welle Werte von $P_n - P_v < 0{,}25\ P_v$ auftreten. Dies sind aber Druckunterschiede, die normalerweise in der Akustik nicht mehr vorkommen, so daß die Vereinfachungen im Bereich normaler Schallwellen ohne weiteres zulässig sind.

Eine gewisse Beschränkung dieser Überlegungen besteht darin, daß die Frontbreite des Verdichtungsstoßes, die in den vorliegenden Betrachtungen ganz vernachlässigt wurde, für Druckwellen von abnehmender Schwingungsweite immer größer wird. Nach R. Becker[19]) ergibt sich unter Berücksichtigung der Wärmeleitfähigkeit und Zähigkeit für zweiatomige Gase die Frontbreite b eines Verdichtungsstoßes in atmosphärischer Luft nach einfacher Umformung bei kleinen Schalldrücken mit den hier verwendeten Zeichen:

$$b \approx 3{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{P_v}{P_n - P_v}\ [\mathrm{cm}].$$

Für eine Schallwelle mit einem größten Druckunterschied von $\frac{P_n - P_v}{P_v} = 10^{-3}$ wird also die Frontbreite des Verdichtungsstoßes $b = 0{,}035$ cm; man darf die Wellenfront in derartigen Fällen also meist noch als unendlich steil annehmen.

Eine Beschränkung grundsätzlicher Art stellt diese endliche Breite des Verdichtungsstoßes jedoch nicht dar. Sie bedingt für Druckwellen von wesentlich kleinerer Schwingungsweite lediglich eine geringe Änderung ihrer Form in der Weise, daß die als unendlich steil angenommene Wellenfront (beispielsweise auch in Abb. 9) eine endliche Neigung aufweist und sich so die endliche Frontbreite entsprechend der vorstehenden Gleichung ausbildet. Eine wesentliche Änderung ihrer Dämpfungswirkung wird dadurch nicht verursacht, weshalb die folgenden Entwicklungen auch für die kleinsten Schalldrücke noch praktische Bedeutung haben. Die Neigung der Front eines kleinen

[19]) R. Becker, a. a. O., Anm. 6, S. 344, Gl. 36.

Verdichtungsstoßes ist im allgemeinen sogar noch örtlich verschieden, ohne daß dadurch seine Dämpfungswirkung grundsätzlich verändert wird. Lediglich der Zeitpunkt τ_s der Entstehung des Verdichtungsstoßes wird infolge seiner endlichen Neigung früher eintreten, was mit Hilfe der vorstehenden Gleichung von R. Becker, die in diesem Bereich ihrer Ableitung nach volle Gültigkeit besitzt, aber auch noch abgeschätzt werden kann.

Die vorstehenden Überlegungen zeigen also, daß die teilweise Reflexion von Elementarwellen an der steilen Front eines Verdichtungsstoßes und die Erhöhung der Temperatur der Gasteilchen infolge des Leistungsverlustes durch den Gasstoß im gesamten Bereich der technischen Akustik vernachlässigbar gering ist. Man kann daher auch jede Schallwelle mit steiler Front mit den einfachen mathematischen Hilfsmitteln einer einzeln in homogener Atmosphäre laufenden Druckwelle beschreiben, wenn es nur möglich ist, in jedem Augenblick die genaue Lage der steilen Wellenfront relativ zur Schallwelle anzugeben. Sie begrenzt dann lediglich deren Vorderseite und verhindert die Mehrdeutigkeit der mathematischen Lösung[12]) durch Beschränkung ihres physikalischen Geltungsbereiches, ohne praktisch an ihrer Form etwas zu ändern. Dabei wird aber in der Front mechanische Energie der Schallwelle in Wärme verwandelt, so daß also die Schallwelle auch in einem idealen, vollkommen dämpfungsfreien Gas durch ihre steile Wellenfront langsam aufgezehrt wird. Formal kommt dies dadurch zum Ausdruck, daß die Wellengeschwindigkeit w der Stoßstelle nach Gl. (31a) entsprechend Kurve II in Abb. 6 bzw. nach Gl. (31b) für genügend kleine Druckwellen stets kleiner als die Geschwindigkeit $(a_e + u_e)$ des ihr unmittelbar nachfolgenden stetigen Teiles der Druckwelle ist. Nach Gl. (31b) ist in diesem Fall der Unterschied Δw zwischen der Wellengeschwindigkeit w der Stoßstelle und der Schallgeschwindigkeit a_v vor ihr nur halb so groß wie der zwischen den Geschwindigkeiten der ihr unmittelbar folgenden und vorausgehenden stetigen Wellenteile. Die steile Front schreitet daher relativ zur nachfolgenden Schallwelle in diese hinein und zehrt sie dabei langsam auf[20]).

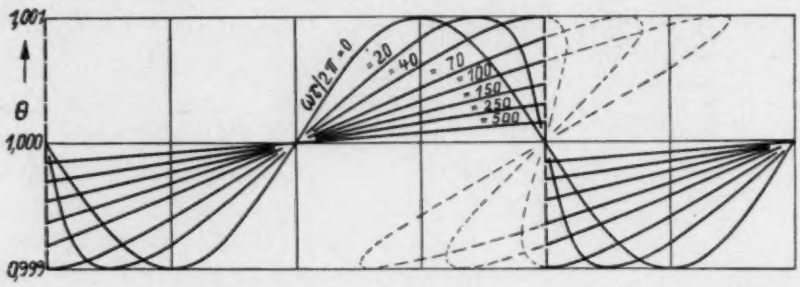

Abb. 9.
Formen einer ursprünglich harmonischen Schallwelle bei der Ausbildung eines Verdichtungsstoßes an der Wellenfront zu verschiedenen Zeitpunkten. Die hintereinanderlaufenden Wellen wurden zum besseren Vergleich unmittelbar übereinander gezeichnet

An Hand der Gl. (31b) findet man bei genügend kleinen Schwingungsweiten mit $a_e = a_v$ für die absolute Geschwindigkeit $w + u_v$ der steilen Wellenfront die Beziehung

$$\begin{aligned}\frac{dx_F}{d\tau} = w + u_v &= a_v + u_v + \frac{1}{2}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}(a_n - a_v)\\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[a_0 + \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}(a_v - a_0\right]\right.\\ &\qquad \left. + \left[a_0 + \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}(a_n - a_0)\right]\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left[(a_v + u_v) + (a_n + u_n)\right],\end{aligned} \tag{37}$$

wenn bedeutet:

x_F (m) der Ort der steilen Wellenfront

a_0 (m/sec) der Schallzustand der unbeeinflußten Atmosphäre.

Daraus erkennt man, daß die absolute Geschwindigkeit $(w + u_v)$ der steilen Wellenfront bei kleiner Schwingungsweite stets gleich dem arithmetischen Mittelwert der absoluten Geschwindigkeiten der unmittelbar vor bzw. nach ihr laufenden stetigen Wellenteile ist. Für Schallwellen, deren Form im Schallzustandsfeld antisymmetrisch zur atmosphärischen Linie a_0

[20]) Vgl. hierzu auch: R. D. Fay, Plane Sound Waves of finite Amplitude. J. Acous. Soc. Am. 3 (1931/32), S. 222—241.

ist — für die also stets $a_n - a_0 = a_0 - a_v$ ist — erhält man nach Gl. (37) eine unveränderliche Absolutgeschwindigkeit der steilen Wellenfront: $w + u_v = a_0$; d. h. also bei antisymmetrischen Schallwellen bewegt sich die entstehende steile Wellenfront mit der unveränderlichen Schallgeschwindigkeit a_0 der ursprünglichen Atmosphäre. Bei unsymmetrischen Schallwellen kann die Absolutgeschwindigkeit der Wellenfront sowohl größer wie auch kleiner als die Schallgeschwindigkeit der Atmosphäre sein, je nachdem ob $a_n - a_0$ größer oder kleiner als $a_0 - a_v$ ist.

Am Beispiel einer ursprünglich harmonischen Schallwelle soll nun noch die Größe der Absorption der mechanischen Energie einer Schallwelle durch Gasstoß berechnet werden.

2. Die Form einer ursprünglich harmonischen Schallwelle.

Wie früher[12]) schon gezeigt wurde, können vor allem Ultraschallwellen in Gasen schon nach sehr kurzem Weg steile Fronten erhalten und werden dann u. U. infolge der mit ihnen verbundenen mechanischen Verluste wesentlich stärker geschwächt als dies nach den bisher bekannten Dämpfungsursachen zu erwarten ist. Da diese bei realen Gasen stets vorhanden sind, stellt sich auch schon vor dem Eintritt des Verdichtungsstoßes eine stärkere Dämpfung der Welle infolge der Versteifung ihrer Wellenfront ein. Die normale Dämpfung einer Schallwelle soll jedoch hier nicht berücksichtigt und lediglich der Energieverlust der Welle als Folge des Gasstoßes berechnet werden. Dabei soll die Rechnung hier auf solche ebenen Schallwellen beschränkt werden, die ursprünglich (zur Zeit $\tau = 0$) eine rein harmonische Form besaßen. Die Gleichung für das Schallfeld einer derartigen Welle im homogenen Gasraum lautet[12])[21]):

$$x = \left[a_0 + \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}(a - a_0)\right]\tau - \frac{a_0}{\omega}\arcsin\frac{2}{\varkappa-1}\cdot\frac{a-a_0}{U}, \tag{38}$$

Die Eigengeschwindigkeit der Gasteilchen dieser Schallwelle ist dabei:

$$u = U \sin\frac{\omega}{a_0}\left\{\left[a_0 + \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}(a - a_0)\,\tau - x\right\}\right., \tag{39}$$

wobei bedeuten:

ω (1/sec)	die Kreisfrequenz der harmonischen Schwingung,
U (m/sec)	die Schwingungsweite der Eigengeschwindigkeit der Gasteilchen
a_0 (m/sec)	die Schallgeschwindigkeit der ungestörten Gasatmosphäre.

Durch Einsetzen dieser Lösung in die Differentialgleichungen (14) und (15) überzeugt man sich leicht von ihrer Richtigkeit. Man erkennt aus der vorstehenden Lösung, daß zu allen Zeitpunkten $\tau \neq 0$ keine harmonischen Wellenformen mehr bestehen. Die Schwingungsform im Schallzustandsfeld ist jedoch immer zum Schallzustand a_0 der ungestörten Atmosphäre antisymmetrisch.

Die Grenze der Stetigkeit dieser ungedämpften Schallwellen ergibt sich nach Gl. (38) in dem Punkt der Welle, der zuerst eine unendlich steile Tangente aufweist, also für:

$$a_s = a_0\,; \quad \tau_s = \frac{2}{\varkappa+1}\frac{a_0}{\omega \cdot U}\,; \quad x_s = a_0\,\tau_s = \frac{2}{\varkappa+1}\frac{a_0^2}{\omega\,U}, \tag{40}$$

wenn der Zeiger s wieder die Grenze der Stetigkeit der Schallwelle andeutet.

Für alle Zeitpunkte $\tau > \tau_s$ tritt an der Vorderseite jedes Wellenberges ein Gasstoß auf, dessen absolute Geschwindigkeit infolge der Symmetrieeigenschaften der Wellenform unveränderlich gleich der Schallgeschwindigkeit a_0 der ungestörten Atmosphäre ist. Die Gleichungen (38) und (39) behalten nach den vorstehenden Überlegungen zur Berechnung der Wellenform ihre Gültigkeit auch in Zeitpunkten $\tau > \tau_s$ für solche Gaszustände, die physikalisch eindeutig vor bzw. hinter der steilen Front liegen. Daher erhält man für eine derartige Schallwelle die in Abb. 9 für verschiedene Zeitpunkte jeweils übereinander gezeichneten Wellenformen.

Nachdem auf diese Weise die Wellenform einer ursprünglich harmonischen Schallwelle berechenbar ist, kann auch die jeweils in ihr

[21]) Vgl. auch E. Fubini-Ghiron, Alta Frequ. 4 (1935), S. 530—581, bzw. Rev. Acoust. 6 (1937), S. 118—127.

gespeicherte mechanische Energie und damit ihre zeitliche Abnahme unter der Wirkung der Stoßverluste berechnet werden.

3. Die Stoßverluste einer Schallwelle

Die Berechnung des zeitlichen Verlaufes der Stoßverluste einer Schallwelle kann durch zeitliche Integration der in der steilen Front vernichteten mechanischen Energie mit Hilfe der Gl. (12) bzw. (13) vorgenommen werden oder auf Grund der Änderung der jeweils noch in der Welle gespeicherten mechanischen Energie erfolgen. Diese setzt sich aus der potentiellen und der kinetischen Energie der die Welle bildenden Gasteilchen zusammen und soll nachstehend berechnet werden.

Für die mechanische Energie L der Gewichtseinheit des Gases einer verlustfrei aufgebauten Druckwelle ergibt sich allgemein zunächst bei gleichem Zustand aller betrachteten Gasteilchen

$$L = -\int_{v_0}^{v} P\,dv + \frac{u^2-u_0^2}{2g} = \int_{T_0}^{T} \frac{c_v}{A}\,dT + \frac{u^2-u_0^2}{2g}.$$

Damit wird also die je Gewichtseinheit eines Gases von überall gleichem Zustand gespeicherte mechanische Energie:

$$L = \frac{R\,T_0}{\varkappa-1}\left[\frac{T}{T_0}-1\right] + \frac{u^2-u_0^2}{2g}.$$

Mit Hilfe der Definitionsgleichung der Schallgeschwindigkeit in idealen Gasen [s. Gl. (6)] und der früher schon entwickelten Gl. (17) für ebene stetige Druckwellen in homogener Atmosphäre erhält man je Gewichtseinheit eines idealen Gases vom Schallzustand a die gesamte mechanische Energie in der Form:

$$L = \frac{a-a_0}{g\,\varkappa(\varkappa-1)}\left[2\,a_0 + \frac{3\varkappa-1}{\varkappa-1}(a-a_0) + 2\,\varkappa\,u_0\right].$$

Für eine Druckwelle von beliebiger Form ergibt sich damit ganz allgemein die in ihr gespeicherte mechanische Energie je Flächeneinheit der Wellenfront durch Integration über alle ihre Gasteilchen.

Bei einer periodischen Druckwelle findet man entsprechend die mittlere in der Raumeinheit gespeicherte mechanische Energie — die sogenannte räumliche Energiedichte ε — durch Integration über eine volle Periode:

$$(40)\qquad \varepsilon = \frac{\omega}{2\pi a_0}\int_{x=-\frac{\pi a_0}{\omega}}^{+\frac{\pi a_0}{\omega}} \frac{L\,dx}{v} = \frac{\omega}{2\pi a_0 v_0}\int_{x=-\frac{\pi a_0}{\omega}}^{+\frac{\pi a_0}{\omega}} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2}{\varkappa-1}} \cdot \frac{(a-a_0)}{g\,\varkappa(\varkappa-1)}\left[2\,a_0 + \frac{3\varkappa-1}{\varkappa-1}(a-a_0)\right] dx,$$

wobei sich a in Abhängigkeit von x oder umgekehrt x als Funktion von a für eine bestimmte Welle aus ihrer Form ergibt.

Für die hier betrachtete, ursprünglich harmonische Druckwelle erhält man beispielsweise nach Gl. (38) in einem bestimmten Zeitpunkt:

$$dx = \left[\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\tau - \frac{2}{\varkappa-1}\frac{a_0}{\omega U}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{\varkappa-1}\cdot\frac{a-a_0}{U}\right)^2}}\right] d\,(a-a_0).$$

Setzt man diese Beziehung in Gl. (40) ein, so findet man die zum Zeitpunkt τ gehörige räumliche Energiedichte der Schallwelle. Beachtet man dabei, daß stets $(a-a_0)^2 \ll a_0^2$ ist, so erhält man unter Vernachlässigung von kleinen Gliedern höherer Ordnung:

$$(40\text{a})\quad \varepsilon = \frac{P_0}{2\pi a_0^2(\varkappa-1)^2}\int_{a-a_0=-\Delta a}^{+\Delta a}\left[2a_0+3\,\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}(a-a_0)\right]\left[(\varkappa+1)\,\omega\tau - \frac{2a_0}{U}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{\varkappa-1}\,\frac{a-a_0}{U}\right)^2}}\right](a-a_0)\,d\,(a-a_0),$$

wenn $\Delta a = a_u - a_0 = a_0 - a_v$ ist.

Die Integration darf dabei nur über stetige Teile der Welle erfolgen. Die halbe Änderung Δa des Schallzustandes in der Stoßstelle ergibt sich in Abhängigkeit von der Zeit aus Gl. (38), indem man $x = x_F = a_0\,\tau$ setzt; man findet daraus dann mit $a = a_F$ und $a_F - a_0 = \Delta a$

$$(41)\qquad \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\cdot\frac{\Delta a}{a_0}\,\omega\,\tau = \arcsin\left(\frac{2}{\varkappa-1}\frac{\Delta a}{U}\right) = \delta\,,$$

wenn δ eine Abkürzung nach vorstehender Definitionsgleichung ist.

Die Ausführung der Integration der Gl. (40a) ergibt damit:

$$(42)\qquad \frac{8}{3(\varkappa+1)}\frac{\varepsilon}{P_0}\left(\frac{a_0}{U}\right)^2 = 1-\frac{\delta}{\pi}\left[1-\frac{2}{3}\sin^2\delta\right] + \frac{1}{\pi}\sin\delta\cos\delta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\,,$$

wenn ε_0 (mkg/m³) die räumliche Energiedichte[22]) der Schallwelle vor dem Eintritt des Gasstoßes ist.

In Abb. 10 ist diese Funktion, die die zeitliche Abhängigkeit der räumlichen Energiedichte einer ursprünglich harmonischen Schallwelle nach Eintritt des Verdichtungsstoßes liefert, anschaulich dargestellt. Um einen einfachen Vergleich mit den in der Akustik geläufigeren Dämpfungsfaktoren einer Schallwelle zu ermöglichen, wird ferner formal noch die folgende Umrechnung durchgeführt.

In der Akustik kennzeichnet man vielfach die Abnahme der Energie einer Schallwelle durch einen auf den Weg der Welle bezogenen Dämpfungsfaktor α nach folgender Definitionsgleichung:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = e^{-\alpha x}\,.$$

Setzt man hierin für den Weg der Welle im vorliegenden Fall:

$$x = a_0(\tau - \tau_s) = \frac{2}{\varkappa+1}\frac{a_0^2}{\omega\,U}\left[\frac{\delta}{\sin\delta} - 1\right],$$

so erhält man den einem normalen Dämpfungsfaktor entsprechenden zeitveränderlichen Faktor α_s beim Auftreten eines Gasstoßes, der künftig zur Abkürzung der Bezeichnung auch Stoßdämpfungsfaktor genannt werden soll; es ergibt sich dann die folgende dimensionslose Beziehung:

$$(43)\qquad \alpha^* = \alpha_s\cdot\frac{2}{\varkappa+1}\frac{a_0^2}{\omega\,U} = \frac{\sin\delta}{1-\sin\delta}\ln\frac{1}{1-\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\delta\right)\frac{\delta}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sin\delta\cos\delta}\,.$$

In Abb. 10 ist auch diese Abhängigkeit durch die Kurve α^* veranschaulicht. Man erkennt

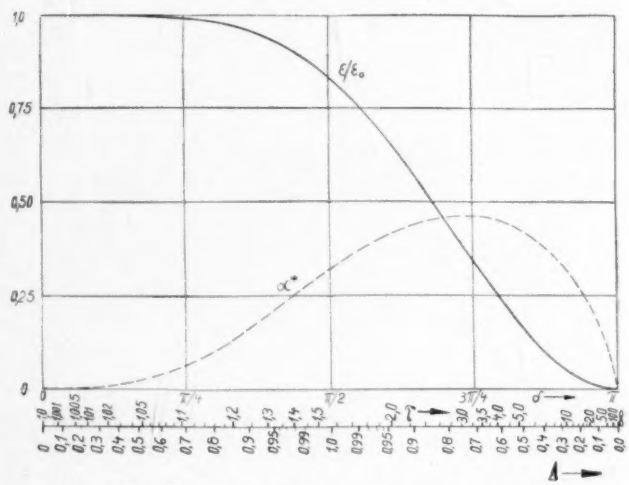

Abb. 10. Verlauf der räumlichen Energiedichte $\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right.$ nach Gl. (42)$\left.\right)$ einer ursprünglich harmonischen Schallwelle unter dem Einfluß der Energieverluste in einer steilen Wellenfront (Gasstoß) und Verlauf des dimensionslosen „Stoß-Dämpfungsfaktors" (α^* nach Gl. 43).

Die Abkürzungen bedeuten:

$\alpha^* = \frac{2}{\varkappa+1}\frac{a_0^2}{\omega\,U}\alpha_s$; α_s (1/m) der auf den Weg der Welle bezogene Stoßdämpfungsfaktor.

$\delta = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\frac{\Delta a}{a_0}\omega\,\tau = \arcsin\frac{2}{\varkappa-1}\frac{\Delta a}{U}$;

$2\,\Delta a$ (m/sec) die zeitveränderliche Höhe des Verdichtungsstoßes

$\Delta = \frac{2}{\varkappa-1}\frac{\Delta a}{U} = \sin\delta$;

U (m/sec) die Schwingungsweite der Eigengeschwindigkeit der Gasteilchen.

$\tau = \frac{\varkappa+1}{2}\frac{U}{a_0}\cdot\omega\,\tau = \frac{\delta}{\sin\delta}$;

ω (1/sec) die Kreisfrequenz der Schwingung,
τ (sec) die Zeit,
$\varkappa = c_p/c_v$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen.

[22]) Infolge der vereinfachenden Voraussetzung, daß die Form der Schallwelle im Schallzustandsfeld antisymmetrisch zur atmosphärischen Linie $a = a_0$ sein soll, ergibt sich gegenüber normalen Schallwellen — die in dieser Darstellung stets eine geringe Unsymmetrie aufweisen — ein abweichender Absolutwert der anfänglichen räumlichen Energiedichte ε_0 der harmonischen Welle. Da es sich hier jedoch nur um die relative Schwächung der Welle unter dem Einfluß des Gasstoßes handelt, ist diese Abweichung praktisch von völlig untergeordneter Bedeutung.

daraus in Verbindung mit Gl. (41) zunächst, daß die Dämpfung einer Schallwelle als Folge eines Gasstoßes mit ihrem Weg bzw. mit der Zeit stark veränderlich ist, da sich mit diesen ihre Form und damit die Größe des Gasstoßes ändert; insbesondere ergibt sich noch, daß die Stoßdämpfung außer von der Frequenz auch noch sehr wesentlich von der Schwingungsweite der Schallwelle abhängt.

Die wesentliche Abhängigkeit der Stoßdämpfung einer ursprünglich harmonischen Schallwelle von ihrer Schwingungsweite und von der Zeit bzw. ihrem Weg stellt gegenüber den bisher bekannten Erscheinungen der Dämpfung etwas Neues dar. Leider wurden daher auch bei den meisten bisherigen Veröffentlichungen über Dämpfungsmessungen bei Schallwellen keine Angaben über die verwendeten Schalldrücke gemacht. In vielen Veröffentlichungen[23]) wird jedoch auf Grund von Versuchen eine Vergrößerung der klassischen Dämpfungskonstante vermutet, die u. U. durch die hier berechneten Stoßverluste einer Schallwelle gedeutet werden kann.

Zusammenfassung

Als Folge der Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit eines Gases wird die Front einer Druckwelle im Laufe der Zeit immer steiler und geht schließlich in einen Verdichtungsstoß über. Infolgedessen entstehen in der Wellenfront besondere Stoßverluste, d. h. es wird in ihr mechanische Energie der Druckwelle in Wärme verwandelt. Es wird nachgewiesen, daß die hinter einem nichtstationären Verdichtungsstoß laufenden stetigen Wellenteile diesen immer zu überholen versuchen und dabei teilweise an ihm reflektiert werden. Die mathematische Beschreibung einer Druckwelle mit steiler Front gelingt daher im allgemeinen nicht mehr mit Hilfe der einfachen Gesetzmäßigkeiten einer einzelnen, im homogenen Gasraum laufenden Druckwelle; dies ist nur noch in Sonderfällen mit praktisch ausreichender Näherung möglich.

Als ein derartiger Sonderfall von physikalischer Bedeutung werden Druckwellen von kleinster Schwingungsweite (Schallwellen) näher betrachtet. Es zeigt sich dabei, daß die durch den Gasstoß verursachte verhältnismäßige Schwächung („Stoßdämpfung") einer ursprünglich harmonischen Schallwelle von ihrer Frequenz sowie außerdem aber — im Gegensatz zu normaler Dämpfung — auch von ihrer Schwingungsweite und von der Zeit bzw. vom Ort der Schallwelle insofern abhängig ist, als sich mit der Zeit bzw. dem Ort ihre Form ändert.

[23]) Vgl. z. B. N. SCHMIDTMÜLLER, Schallabsorption in Gasen bei Frequenzen zwischen 20 und 100 kHz. Diss. Techn. Hochsch. Berlin und Akust. Z. 3 (1938), S. 115—129, insbesondere S. 125.

(Eingegangen am 18. Januar 1941.)

Der Einfluß aerodynamischer Eigenschaften auf Schallfeld und Strahlungsleistung einer Luftschraube[1])

Von Wilhelm Ernsthausen

Mitteilung aus dem Institut für Elektrophysik der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V. Berlin-Adlershof

(Mit 33 Textabbildungen)

A. Einleitung

Die Untersuchungen, welche über das Luftschraubengeräusch und seine Entstehung bisher durchgeführt wurden[2]), haben gezeigt, daß das um den Schraubenflügel ausgebildete statische Feld verantwortlich für die Größe und Verteilung des Schalldruckes ist. Von hier ausgehend behandelt die vorliegende Arbeit den quantitativen Einfluß von Luftschraubenabmessungen, Drehzahl, Profilform und Auftriebsbeiwert auf das Schallfeld[3]).

Die früher dargelegten Ansätze[4]), welche die Beziehungen für den Übergang von mechanischer in akustische Energie liefern, werden der neuen Problemstellung durch eine erweiterte Fassung angepaßt. Ihre Entwicklung ergibt Schalldruck und Schalleistung im absoluten Maß und damit den mechanisch-akustischen Wirkungsgrad der Luftschraube für ihre Kenngrößen in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit.

Die theoretischen Ergebnisse werden für einen Bereich numerisch ausgewertet, welcher vor allem die Größen- und Betriebsverhältnisse üblicher Schraubenmuster berücksichtigt.

An Modellschrauben verschiedener Dicke und Auftriebsbeiwerte werden Messungen über Form und absolute Größe des Schallfeldes und ein Vergleich mit der Rechnung durchgeführt.

B. Theorie

Wir beschränken uns bei der Behandlung unserer Aufgabe auf Schrauben von symmetrischer Profilform, welche frei im ungestörten Medium umlaufen.

Die in der Akustik übliche Linearisierung der Lösungen der Wellengleichung behalten wir einer einfachen mathematischen Durchführung zuliebe bei. Dieses Vorgehen führt bis zu dem die Nähe der Schallgeschwindigkeit kennzeichnenden Auftreten von Verdichtungsstößen zu keiner nennenswerten Einschränkung, da die für die akustische Strahlung verantwortliche Erregung der Schraubenkreisfläche (in Richtung ihrer Normalen) Druckänderungen von der Größenordnung nur einiger Tausendstel Atmosphären verursacht und nichtlineare Eigenschaften der Luft erst bei Drücken nachgewiesen werden können, welche um mindestens zwei Zehnerpotenzen höher liegen.

Der umlaufende Schraubenflügel erregt periodisch alle Punkte der von ihm beschriebenen Kreisfläche mit fortschreitender Phase, so daß jeder dieser Punkte als Quelle einer sekundären Wechselströmung, also als Elementarstrahler, angesehen werden kann. Die mit dem periodisch verschwindenden Feld des Profils in engem Zusammenhang stehende Ergiebigkeit dieser Strahler bestimmt in Verbindung mit ihren Strahlungseigenschaften das Schallfeld, welches sich somit durch Summation über die strahlende Fläche unter Berücksichtigung der zeit-

[1]) Abgeschlossen am 18. November 1940.

[2]) Lit. Zusammenstellung in der Akust. Z. 4 (1939), H. 1, S. 20.

[3]) Dazu wird bemerkt, daß sich das Luftschraubengeräusch aus zwei Anteilen zusammensetzt: Dem vom Profilfeld erzeugten Drehklang, welcher aus einer Reihe diskreter Teiltöne besteht und dem Drehgeräusch, einem von der Wirbelablösung am Schraubenflügel herrührenden Frequenzkontinuum. Unsere Untersuchungen erstrecken sich nur auf den Drehklang, da er in einem gewissen Abstand von der Luftschraube stets vorherrscht.

[4]) Vgl. Fußnote 9.

lichen und räumlichen Phasen im Aufpunkt berechnen läßt.

Das bewegte Profil erteilt dem angrenzenden Medium in jedem Flächenelement eine durch sein Strömungsfeld gegebene Geschwindigkeit. Da die Behandlung unserer Aufgabe durch eine getrennte Betrachtung der akustischen und aerodynamischen Wirkungen anschaulicher wird, denken wir uns diese Geschwindigkeit in eine flächennormale und in eine tangentiale Komponente zerlegt. Während die normale Komponente durch die Auslenkung der Luftteilchen um den Betrag der Blattdicke und durch die Größe der Zirkulation gegeben ist, erscheint die tangentiale Komponente im periodischen Umlauf der Erregungsphase der räumlich fest gedachten Elementarstrahler und bewirkt damit die bekannte, bisher aus den Vorstellungen der Aerodynamik abgeleitete Feldverteilung um ein angeströmtes Profil.

1. Die Profilform

Die Form des Profils, welche offenbar maßgebend für den zeitlichen Verlauf von Druck und Geschwindigkeit in einem Raumpunkt ist, beziehen wir in die Beschreibung der akustischen Vorgänge dadurch ein, daß wir den je Umlauf auf die Luft wirkenden Druckstoß durch sein Fourierspektrum darstellen.

Dieses läßt sich unmittelbar aus der Profilform ableiten[5]). Abb. 1 zeigt den mit Hilfe eines Druckempfängers in der Nähe des vorbeilaufenden Schraubenflügels registrierten Druckverlauf.

Um in der Rechnung von vornherein mit harmonisch zerlegten Teilschwingungen operieren zu können, muß der Fourierfaktor so bestimmt werden, daß er möglichst allgemein für profilähnliche Querschnittsverhältnisse gilt. Daher ersetzen wir in Abb. 2 den angedeuteten wirklichen Verlauf durch die eingezeichnete Rechteckkurve, welche räumlich-zeitlich in fester Beziehung zu den Profildimensionen steht. Die damit gegebene Abweichung vom wirklichen Vorgang kann sich erst bei höheren Harmonischen auswirken.

Den Fourierfaktor für z in gleichem Winkelabstand umlaufende Flügel berechnet man zu

$$(1) \qquad k'_m = \frac{z}{\pi} \int_{\pi/z-b/2r}^{\pi/z+b/2r} \cos \nu x \, dx \pm \frac{2}{\nu \pi} z \sin \frac{\nu b}{2 r}.$$

(b = Blattiefe, r = zugehöriger Schraubenradius).

Er wächst mit z, da nach Abb. 2 der Bogen b/r relativ zur Periode $2\pi/z$ größer wird. Die

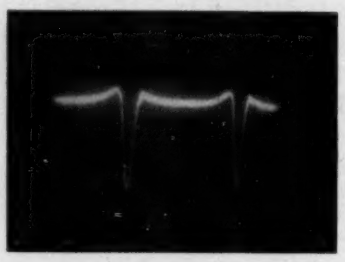

Abb. 1. Druckverlauf in der Nähe des Schraubenflügels

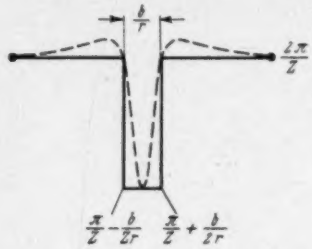

Abb. 2. Rechteckförmige Näherung des wirklichen Druckverlaufs

Gl. (1) gilt bis zur Erreichung des Symmetrietypus: $b/r = \pi/z$.

Da der Druck das Produkt von Geschwindigkeit und Luftwiderstand ist, geht aus dem Druckspektrum das Spektrum der wirklichen medialen Bewegung durch Division mit der Ordnung der Harmonischen ν hervor, Wir erhalten so, weil der Winkel $b/2r$ gewöhnlich sehr klein ist, für den Fourierfaktor der periodischen Luftbewegung am Schraubenblatt

$$(2a) \qquad k_m \approx \frac{z b}{\nu \pi r},$$

welcher sowohl für die normale als auch für die tangentiale Komponente gilt.

Die Blattiefe b ändert sich mit r nur wenig. Wir führen sie in unsere Betrachtung mit dem

[5]) Ernsthausen, Akust. Z. 3 (1938), H. 3, S. 41. Luftfahrtforschung 1936, H. 12. Obata und Mitarbeiter, Rep. Aeron. Res. Inst. Tokyo 1933, S. 99 und 132.

konstanten Wert b' bei $R/2$ ein. Außerdem ersetzen wir die Funktion $k_m(r)$ durch ihren Mittelwert, mit welchem die Schraubenkreisfläche belegt zu denken ist:

$$\bar{k}_m = \frac{2}{R^2}\int_0^R \frac{z\,b'}{\nu\,\pi\,r}\,r\,dr = \frac{2\,z\,b'}{\nu\,\pi R}. \tag{2}$$

Dieser Ausdruck ist gleich dem Fourierfaktor des Flügelquerschnittes, der sich auf einem Kreis mit dem Radius $R/2$ fortbewegt.

Die in Abb. 20 dargestellten Analysen befinden sich bei tiefen Ordnungen und niedrigen Geschwindigkeiten in Übereinstimmung mit Gl. (1).

2. Das Profil ohne Anstellung

Die Wirkung eines rotierenden nichtangestellten Profils kann wegen der in jedem Punkt der Drehungsebene periodisch und in jeder Richtung nahezu gleichphasig erfolgenden Verdrängung der äquivalenten Mediummasse durch einen Kugelstrahler nullter Ordnung ersetzt werden. Beschränken wir uns, wie bereits erwähnt, auf die akustisch allein bedeutsamen normalen Komponenten $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$, so ist die Geschwindigkeit durch

$$U_m = \frac{1}{2}\,j\,m\,\omega\,\bar{d}\,\bar{k}_m \tag{3}$$

gegeben. Wenn unter $\bar{d}$ der über die Schraubenkreisfläche verteilte Mittelwert verstanden wird, ist $\bar{d}\,\bar{k}_m$ eine durch die periodische Blattfolge verursachte Teilschwingung der Luftbewegung längs der Profilberandung. Unter der plausiblen Annahme, daß die Profildicke linear bis auf Null bei $r = R$ abnimmt

$$\left\{d(r) = 2\,d'\left(1-\frac{r}{R}\right)\right\}$$

und daß d' ihren Wert bei $R/2$ bedeutet, erhält man die mittlere Strahleramplitude der ganzen Fläche

$$\bar{d} = \frac{4}{R^2}\int_0^R d'\left(1-\frac{r}{R}\right)r\,dr = \frac{2}{3}\,d', \tag{3a}$$

welche damit auch gleich der Dicke bei $2/3\,R$ ist.

Hiermit und durch Integration über alle Elemente bei Berücksichtigung der Phasen im Abstand R_∞ bestimmen wir das Flächenpotential zu

$$\psi_0 = j\,\frac{F_s}{4\,R_\infty}\,m\,v_u\,\bar{k}_m\,\delta\,\chi_{0,m}(\varphi)\,e^{j\vartheta}, \tag{4}$$

wenn gesetzt wird

$$\delta = \frac{\bar{d}}{R};\quad F_s = \pi R^2;\quad v_u = \omega R;$$

$$\vartheta = m\,\omega\left(t - \frac{R_\infty}{c}\right).$$

Die Richtcharakteristik $\chi_{0,m(\varphi)}$ wird in Polarkoordinaten durch eine zweiblättrige Kurve beschrieben, deren beide Hauptmaxima in der Rotationsebene liegen.

Mit den bereits an anderer Stelle[6]) abgeleiteten und dargestellten Integralen

$$\Phi_{p,m}(\xi) = \int_0^\xi x^p J_m(x)\,dx, \tag{5}$$

$$\xi = m\,\frac{v_u}{c}\cos\varphi;\quad x = m\,\frac{\omega r}{c}\cos\varphi$$

ergibt sich für

$$\chi_{0,m}(\varphi) = \frac{1}{\pi\,\xi^2}\,\Phi_{1,m}(\xi). \tag{6}$$

3. Der Einfluß der Anstellung

Unter der Anstellung der Schraubenblätter versteht man den für die aerodynamische Leistung verantwortlichen Winkel zwischen der Achse des Profils und seiner Anströmrichtung. Er verursacht in jedem Element der Drehfläche eine periodisch wirkende Kraft, welche ein polarisiertes Feld gleich einer Doppelquelle oder einem Kugelstrahler erster Ordnung erregt[7]).

Den Scheitelwert dieser Kraft bestimmen wir mit Hilfe der Zirkulation des Blattelementes welche durch den Stoßdruck — die Potentialdifferenz Φ der Ober- und Unterseite des Profils — gegeben ist.

Bei z-Flügeln ergibt sich die gesamte Zirkulation:

$$z\,\Gamma = \Phi. \tag{7}$$

Dieser Ausdruck stellt den Spitzenwert des bei jedem Umlauf im gleichen Raumpunkt auftretenden Stoßes dar, so daß wir, da wir hier wenigstens für die ersten Harmonischen eine ähnliche spektrale Verteilung wie in Gl. (3)

[6]) Ernsthausen, Akust. Z. 3 (1938), H. 8, S. 380.
[7]) Lamb, Hydrodynamics 1931, § 291.

vorfinden, für die Amplitude jeder Partialschwingung

$$\Gamma_m = \frac{z}{m}\,\Gamma\,\bar{k}_m \tag{8}$$

schreiben müssen. Denn der unveränderlich vorausgesetzte Impuls der ganzen Schraube bei der Berechnung der einzelnen Fourierkomponenten zwingt zur Reduktion des Drehwinkels auf den m-ten Teil. Physikalisch bedeutet dies eine Abnahme der Größe des periodischen Stoßdruckes mit steigender Blattzahl oder Teiltonordnung auf den zeitlich konstanten Betrag der Auftriebskraft durch die gegenseitige Beeinflussung der benachbarten Zirkulationsströmungen.

Mit den Gl. (7) und (8) erhält man durch Ableitung nach der Zeit $\left\{P = -\varrho\frac{d\Phi}{dt}\right\}$, gültig für kleine Anstellwinkel, die Amplitude des vom Blattelement in axialer Richtung auf das Medium ausgeübten Druckes:

$$P_m = -j\,\omega\,\varrho\,z\,\bar{k}_m\,\Gamma \tag{9}$$

und damit die auf das Flächenelement wirkende Kraft

$$dA = -j\,\omega\,\varrho\,z\,\bar{k}_m\,\Gamma\,r\,dr\,d\alpha\,. \tag{10}$$

Für die Zirkulation führt man die bekannte Beziehung

$$\Gamma = \frac{\bar{c}_a}{2}\,b'\,\omega\,r \tag{11}$$

ein, wo $\bar{c}_a$ der mittlere Schraubenauftriebsbeiwert ist, welcher bei dreieckförmiger Verteilung etwa $^2/_3$ des am Flügelende auftretenden Maximalwertes beträgt (vgl. Abb. 14).

Das Potential des äquivalenten Kugelstrahlers erster Ordnung ist dann

$$\psi' = j\,\frac{dA}{4\pi\,\varrho\,\omega}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{e^{j\vartheta}}{R_\infty}\,. \tag{12}$$

Die Entwicklung dieses Ansatzes für die strahlende Fläche kann indessen nur durchgeführt werden, wenn $\bar{c}_a$ als unabhängig von der MACHschen Zahl eingeführt wird, da einfach darstellbare Funktionen, welche für den unter- und überkritischen Bereich stetig ineinander übergehen, nicht bekannt sind. Auch von der Berücksichtigung der PRANDTLschen Regel wird abgesehen, obgleich sich ihre Gültigkeit bis zum Einsatz des ersten Verdichtungsstoßes erwiesen hat[8]), da der durch sie beschriebene Einfluß auf die akustischen Erscheinungen nur gering zu sein scheint.

Die im zweiten Teil der Arbeit aufgeführten Meßergebnisse zeigen, daß bei MACHschen Zahlen größer als 1 die Wirkung der Anstellung verschwindet, was auch im Einklang mit der Beobachtung der aerodynamischen Wirkungen steht.

Das Potential der ganzen Fläche ergibt sich, wie in Gl. (4)

$$\psi_1 = j\,\frac{F_s}{4\,c\,R_\infty}\,z\,\omega\,v_u\,\bar{k}_m\,b'\,\bar{c}_a\,\chi_{1,m}(\varphi)\,e^{j\vartheta}, \tag{13}$$

worin entsprechend den Gl. (5) und (6)

$$\chi_{1,m}(\varphi) = \sin\varphi\,\frac{1}{\pi\,\xi^3}\,\Phi_{2,m}(\xi) \tag{14}$$

ist. Dieser Ausdruck stellt im Polardiagramm eine vierblättrige Kurve dar, welche sowohl in der Schraubenebene als auch in der Achse den Wert Null hat.

Das Ergebnis dieses Abschnittes unterscheidet sich von dem in einer früheren Arbeit[9]) mitgeteilten dadurch, daß zwischen der Bewegungsamplitude und dem Elementarpotential als Folge des dynamischen Ansatzes für die Vorgänge in einem Flächenelement, eine Phasenverschiebung von 90° erscheint. Die in der zitierten Arbeit angeführte Schlußfolgerung für die Schallfeldverteilung der Luftschraube beruht auf nunmehr als unzulänglich erkannten, aus dem statischen Verhalten des Profils abgeleiteten Vorstellungen.

4. Das angestellte Profil

Die akustische Wirkung einer rotierenden Luftschraube läßt sich nun mit Hilfe der in den vorhergehenden Abschnitten durchgeführten Überlegungen beschreiben, wenn man die Komponenten sinngemäß superponiert, welche von den Profildimensionen und von der Anstellung und daher entsprechend von Elementarstrahlern nullter und erster Ordnung herrühren. Wir schreiben für die resultierende Richtcharakteristik

$$\chi_m^H(\varphi) = \chi_{0,m}(\varphi) + H\,\chi_{1,m}(\varphi) \tag{15}$$

[8]) Diesen Hinweis verdanke ich A. W. QUICK.

[9]) ERNSTHAUSEN und WILLMS, Akust. Z. 4 (1939), H. 1.

und für den Parameter

$$H = \frac{v_u}{cm}\frac{\bar{c}_a}{\tau} z\,,\quad \tau = \frac{\bar{d}}{b'}\,, \tag{16}$$

so daß wir für das gesamte Potential

$$\Psi_m = j\frac{F_s}{4\,R_\infty}\, m\, v_u\, \bar{k}_m\, \delta\, \chi_m^H(\varphi)\, e^{j\vartheta} \tag{17}$$

erhalten. Die Ausdrücke mit dem Zeiger H sind durch einen bestimmten Wert des Parameters der Gl. (16) gekennzeichnet.

Durch zeitliche und örtliche Differentiation leiten sich daraus der Schalldruck

$$\underset{eff}{p_m} = \frac{\pi\varrho}{4\sqrt{2}}\frac{R}{R_\infty}\, m^2\, v_u^2\, \bar{k}_m\, \delta\, \chi_m^H(\varphi) \tag{18}$$

$$\underset{eff}{p_m} \approx \frac{7{,}8\cdot 10^5}{R_\infty}\, \bar{k}_m\, \bar{d}\, \varkappa^2\, \chi_m^H(\varphi) \quad \text{in } \mu b\,, \tag{19}$$

$$\varkappa = m\frac{v_u}{c},$$

und die gleichphasige Komponente der Schnelle

$$\underset{eff}{u_m} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}\cdot c}\frac{R}{R_\infty}\, m^2\, v_u^2\, \bar{k}_m\, \delta\, \chi_m^H(\varphi) \tag{20}$$

ab.

5. Die Strahlungsleistung

Das Produkt aus Schalldruck und Schnelle ergibt die Schallintensität, welche, über eine die Schraube konzentrisch einhüllende Kugelfläche integiert, die Schalleistung darstellt. Führt man die Operation durch, so erhält man

$$N_m = \frac{\pi^2\varrho\, c^3}{16}\, F_s\, \bar{k}_m^2\, \delta^2\, \varkappa^4\, S_m^H(\varkappa)\,. \tag{21a}$$

Darin wurde unter der Voraussetzung, daß die Rotationssymmetrieachse in Richtung $\pi/2 \ldots -\pi/2$ verläuft,

$$S_m^H(\varkappa) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \chi_m^H(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi \tag{22}$$

gesetzt.

Wenn die mittlere Blattdicke in cm eingeführt wird, ist die Schalleistung in Watt

$$N_m \approx 9{,}4\cdot 10^3\, \bar{k}_m^2\, \bar{d}^2\, \varkappa^4\, S_m^H(\varkappa)\,. \tag{21}$$

Mit Gl. (21a) bestimmen wir auch den Strahlungswiderstand pro Flächeneinheit

$$r_s = \frac{\pi^2}{8}\varrho\, c\, \varkappa^2\, S_m^H(\varkappa)\,. \tag{23}$$

Da man für die aerodynamische Luftschraubenleistung

$$N_L = k_l^H\frac{\varrho}{2}\pi\,\omega^3\, R^5 \tag{24}$$

schreiben kann, wo k_l^H die Leistungszahl bedeutet, erhalten wir für den mechanisch-akustischen Wirkungsgrad

$$\eta_m = k_H\, m^3\, \varkappa\, S_m^H(\varkappa)\,, \tag{25a}$$

worin die Konstante

$$k_H = \frac{\pi^2\, k_m^2\, \delta^2}{8\, k_l^H} \tag{25b}$$

ist, und k_l^H für bestimmte Werte des Parameters H, Gl. (16), gilt.

In den vorausgehenden Überlegungen wurden statt der Funktionen $k_m(r)$, $d(r)$ und $c_a(r)$ konstante mittlere Werte für die Schraubenfläche eingesetzt, um die Rechnung zu vereinfachen und um Lösungen von allgemeiner Bedeutung zu erhalten. Eine überschlägliche Betrachtung zeigt, daß sich selbst bei der Durchführung der Integration unter Einführung dieser Funktionen die Integrale $\Phi_{p,m}(\xi)$ wegen der damit verbundenen höheren bzw. tieferen Potenzen in r bei niedrigen Ordnungen m nur um geringe Beträge unterscheiden.

6. Ergebnisse der numerischen Auswertung

Mit Hilfe der bereits berechneten Integrale $\Phi_{1,m}(\xi)$ und $\Phi_{2,m}(\xi)$ Gl (5), wurden die Richtfunktionen $\chi_m^H(\varphi)$ der Gl. (15), welche die Form des Schallfeldes beschreiben und die für die Schalleistung charakteristische Strahlungsfunktion $\varkappa^4\, S_m^H(\varkappa)$ nach Gl. (22) ermittelt.

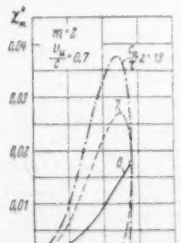

Abb. 3. Die Richtfunktionen für $v_u/c = 0{,}7$, $m = 2$

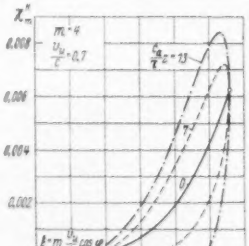

Abb. 4. Die Richtfunktionen für $v_u/c = 0{,}7$, $m = 4$

In den Abb. 3—6 sind die Richtfunktionen in Abhängigkeit von $\xi = m\frac{v_u}{c}\cos\varphi$ für die Umfangsgeschwindigkeit $v_u/c = 0{,}7$ und

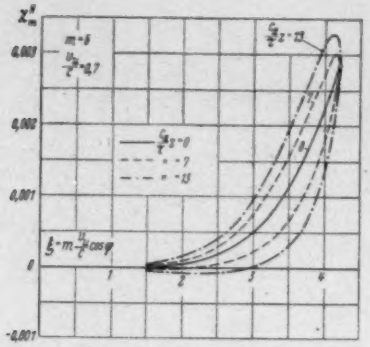

Abb. 5. Die Richtfunktionen für $v_u/c = 0{,}7$, $m = 6$

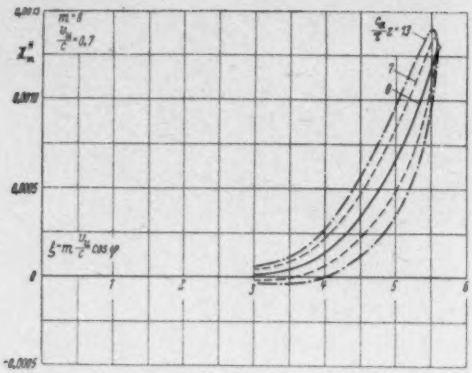

Abb. 6. Die Richtfunktionen für $v_u/c = 0{,}7$, $m = 8$

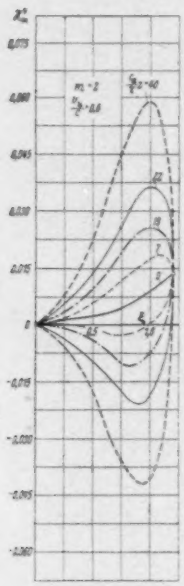

Abb. 7. Die Richtfunktionen für $m = 2$, $v_u/c = 0{,}6$

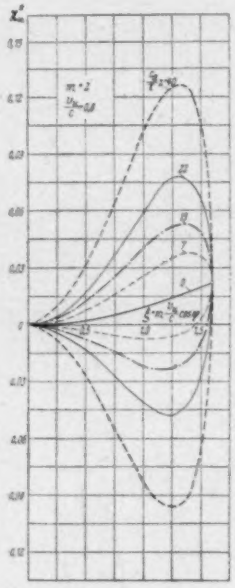

Abb. 8. Die Richtfunktionen für $m = 2$, $v_u/c = 0{,}8$

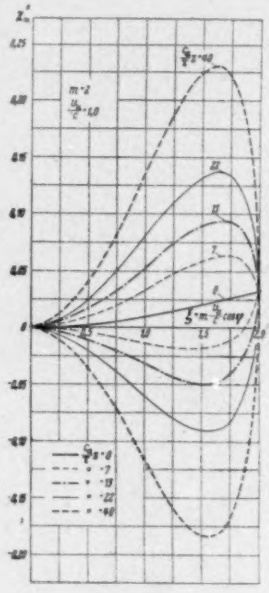

Abb. 9. Die Richtfunktionen für $m = 2$, $v_u/c = 1{,}0$

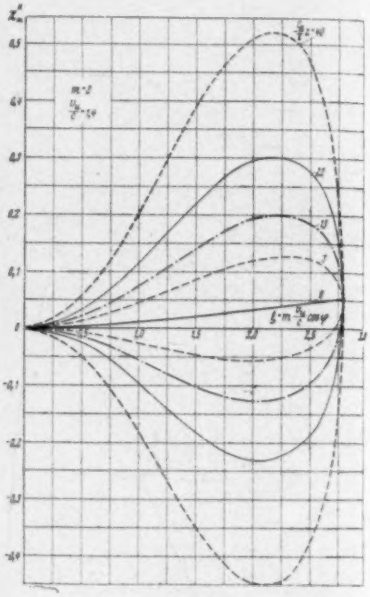

Abb. 10. Die Richtfunktionen für $m = 2$, $v_u/c = 1{,}4$

für drei Werte des Auftriebsparameters $\frac{c_a}{\tau} z = 0, 7, 13$ dargestellt.

Aus den Kurven entnehmen wir, daß mit steigender Ordnung m, also zunehmender Obertonordnung oder Blattzahl, der Einfluß der Anstellung bei gleichzeitigem Ansteigen der Richtschärfe verschwindet. Ein Anwachsen der Auftriebsbeiwerte verschiebt das Hauptmaximum der Richtcharakteristik mehr und mehr hinter die Schraubenebene und spaltet schließlich die Polarkurve völlig auf.

Die Richtfunktionen der Abb. 7—10 wurden für $m = 2$ und für die Werte der Umfangsgeschwindigkeit $v_u/c = 0\ 6\ 0{,}8\ 1{,}0\ 1{,}4$ und des Auftriebsparameters $\frac{c_a}{\tau} z = 0, 7, 13, 22, 40$ berechnet.

Diese Darstellung zeigt uns eine starke Zunahme des Strahlungspotentials und, wenn man die Ordinatenmaßstäbe vergleicht, auch der Richtschärfe mit steigender Umfangsgeschwindigkeit und c_a-Werten. Aus den Richtfunktionen bestimmen sich nach Gl. (22) die Strahlungsfunktionen. Sie lassen sich wegen der Rotationssymmetrie des Schallfeldes durch die auf die Abszisse bezogenen statischen Momente der von den $\chi_m^H(\xi)$ Kurven umschriebenen Flächen darstellen.

Abb. 11 enthält die Funktionen $\varkappa^4 S_m^H(\varkappa)$ für

$\frac{c_a}{\tau} z = 0, 7, 13;\ m = 2, 4, 6, 8$

$0{,}6 \leq v_u/c \leq 1{,}4.$

Die dünnen Querlinien verbinden Werte gleicher Umfangsgeschwindigkeit und geben daher den Verlauf der Strahlungsspektren an, welchen man entnimmt, daß hochtourige Schrauben ihre Energie vorwiegend in den höheren Teiltönen und Langsamläufer in den Grundtönen abstrahlen.

Dies hat seinen physikalischen Grund darin, daß der Strahlungswiderstand bei großen Umfangsgeschwindigkeiten stärker ansteigt als das Teiltonspektrum eines Elementarstrahlers abnimmt.

Da der Energieinhalt der Vorgänge endlich sein muß, nimmt bei großen Umfangsgeschwindigkeiten die Amplitude der hohen Teiltöne schließlich ab, wofür der spektrale Charakter des erregenden Potentialstoßes und der Grenzwert des Strahlungswiderstandes verantwortlich ist.

Der Einfluß der Blattzahl und der Teiltonordnung auf den durch den Auftrieb bewirkten Anteil der Strahlungsleistung läßt sich an Hand von Abb. 11 beurteilen.

Die Darstellung gewährt auch einen Einblick in den theoretischen Aufbau des ganzen Strahlers. Da mit jeder Ordnungszahl eine eigene Strahlungsfunktion verknüpft ist, kann man die Luftschraube als einen Strahler von allgemeinstem Typus ansprechen, dessen Potential durch eine Funktionenreihe von steigender Gliederzahl m darstellbar ist. Sie unterscheidet sich jedoch von den bekannten Strahlergebilden, welche in jeder Ordnung vom ganzen Spektrum des aufgeprägten Vorganges erregt werden können dadurch, daß jede Ordnung nur die zu ihr gehörige Teilschwingung abstrahlen kann. Der mit der Drehzahl umlaufende Schwingungszustand ist daher durch die Zahl 2 m seiner radialen Knotenlinien gekennzeichnet.

Es wird darauf hingewiesen, daß die höchsten Werte der Strahlungsfunktion für das angestellte Profil auf die in Gl. (12) eingeführte Unabhängigkeit des Auftriebsbeiwertes von der Machschen Zahl zurückzuführen ist. In Wirklichkeit verschwindet bei großen Machschen Zahlen (≥ 1) die Zirkulation, so daß die Kurven für den angestellten Flügel in die des nichtangestellten übergehen.

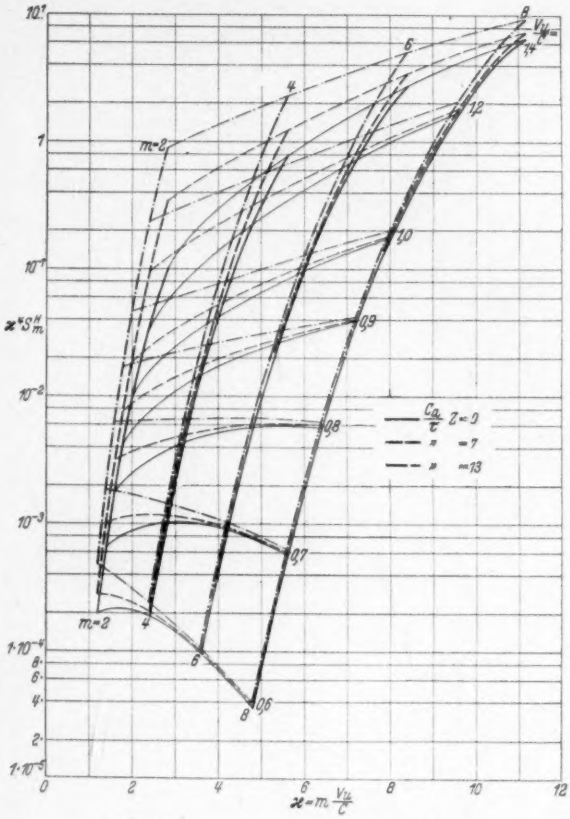

Abb. 11. Die Strahlungsfunktionen

7. Formelzeichen.

A	Luftkraft nach Gl. (10)
F_s	Schraubenfläche (πR^2)
H	Parameter der Anstellung nach Gl. (16)
J_m	Besselsche Funktionen
N_L	Mechanische Luftschraubenleistung
N_m	Strahlungsleistung
P	Axialdruck nach Gl. (9)
R	Schraubenradius
R_∞	Aufpunktsabstand vom Schraubenmittelpunkt
S_H	Schraubenschub nach Gl. (26)
$\varkappa^4 S_m^H$	Strahlungsfunktion
U_m	mittlere Normalgeschwindigkeit der Schraubenfläche
Γ	Zirkulation
Φ	Geschwindigkeitspotential

$\Phi_{p,m}$ Integrale nach Gl. (5)
b Blattbreite
C_a Auftriebsbeiwert
c Schallgeschwindigkeit
d Blattdicke
$f(t)$ Zeitfunktion
j $\sqrt{-1}$
k_H Konstante nach Gl. (25a)
k_l^H Leistungszahl nach Gl. (24)
k_m Fourierkoeffizient
k_s^H Schubzahl nach Gl. (26)
m Ordnung der Richt- und Strahlungsfunktionen
n Normale
p ganzz. positiver Exponent nach Gl. (5)
p_m Schalldruck
r Radiale Koordinate
r_s Strahlungswiderstand
t Zeit
u_m Schnelle
v Translatorische Schraubengeschwindigkeit
v_u Schraubenumfangsgeschwindigkeit (ωR)
x Unabhängige Variable nach Gl. (1) und (5)
z Blattzahl
α Drehwinkel
δ $= d/R$
η_m mechanisch-akustischer Wirkungsgrad
ϑ Zeitfaktor nach Gl. (4)
$\varkappa$ Argument der Strahlungsfunktion
ν Ordnungszahl der Harmonischen
ξ Argument von $\Phi_{p,m}$ nach Gl. (5)
ϱ Luftdichte
τ $= d/b$
φ Winkel zwischen Aufpunktsgeraden und Schraubenebene
χ_m^H Richtfunktion
ψ Strahlerpotential
ω Winkelgeschwindigkeit der Luftschraube, Kreisfrequenz der ersten Harmonischen des Elementarstrahlers
β geometrischer Anstellwinkel.

C. Versuche

1. Die untersuchten Schrauben

Zum Vergleich mit der Theorie wurden an 10 Modelluftschrauben mit symmetrischen NACA-Profilen und drei verschiedenen Dickenverhältnissen (Abb. 12) Schallfeld- und Strahlungsleistung für $v_u/c = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.2, 1.3$ bestimmt.

Die Schrauben — wir wollen der Einheitlichkeit halber auch von „Schrauben" sprechen, wenn der Anstellwinkel Null ist — wurden, da sie nur für Standmessungen vorgesehen waren, ohne Steigung, jedoch mit konstantem Anstellwinkel und in durchweg gleicher Form und Größe (Durchmesser 30 cm) ausgeführt.

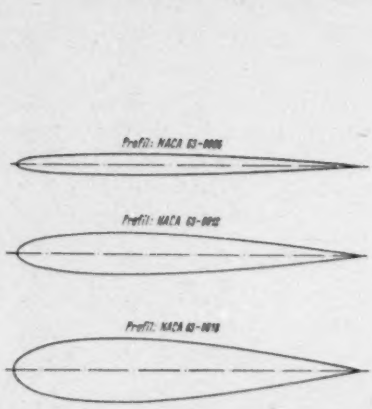

Abb. 12. Die für die Modellschrauben verwendeten Profile

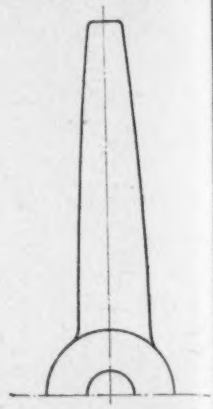

Abb. 13. Die Flügelform der Modellschrauben

Die Flügelform (Abb. 13) ergibt sich aus der geforderten konstanten Querschnittsbelastung.

Als Material wurde die Leichtmetallegierung Bondur 17/11 VN mit einer Zerreißfestigkeit von etwa 50 kg/mm² verwendet.

Folgende Schrauben wurden untersucht:

Nr.		Profil NACA	geom. Anstellwinkel β
2 Flügel	1	63 — 0006	0°
	2	— 0012	0°
	3	— 0018	0°
	4	— 0012	2°
	5	— 0006	4°
	6	— 0012	4°
	7	— 0018	4°
	8	— 0012	8°
	9	— 0012	12°
4 Flügel	10	— 0012	4°

Für die Schraube Nr. 6 wurde die radiale Schub- und Leistungsverteilung berechnet, wobei die im NACA-Report Nr. 460 mitgeteilten Messungen des Auftriebsbeiwertes bei kleinen

Machschen Zahlen zugrunde gelegt wurden[10]). Es ergaben sich die Leistungszahl

$$k_l^H = \frac{N_L}{\varrho/2\, v_u^3\, F_s} = 2{,}81 \cdot 10^{-4} \tag{24a}$$

und die Schubzahl

$$k_s^H = \frac{S_H}{\varrho/2\, v_u^2\, F_s} = 3{,}57 \cdot 10^{-3}. \tag{26}$$

In Abb. 14 sind die Funktionen $C_a(x)$, $\frac{d\,k_s^H}{d\,x}(x)$ und $\frac{d\,k_l^H}{d\,x}(x)$ für $x = r/R$ dargestellt.

Mit Hilfe der Leistungszahlen ermitteln wir den akustisch-mechanischen Wirkungsgrad dieser Schraube nach Gl. (25a) und (25b):

$$\eta_m \approx 0{,}555\, \nu\, S_m^H(\varkappa)\,.$$

In Abb. 15 ist η_m für die ersten vier Harmonischen in Abhängigkeit von v_u/c aufgetragen. Danach werden bei $v_u/c = 1{,}0$ einige Promille und bei $v_u/c = 1{,}2$ einige Prozent der mechanischen Luftschraubenleistung in Schall umgesetzt. In Wirklichkeit sind die Schalleistungen bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten, wie die Messungen zeigen, noch größer.

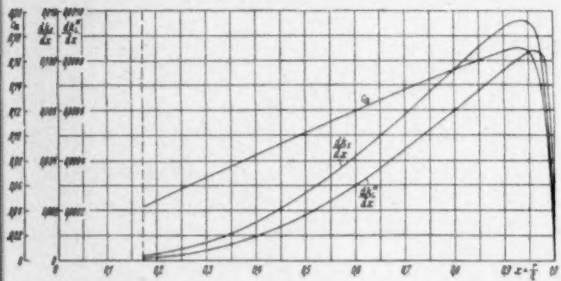

Abb. 14. Die Schub- und Leistungsverteilung über dem Radius

Die Schrauben Nr. 1, 2 und 3 (ohne Anstellung) neigen durchweg zu Biege- und Torsionsschwingungen, welche durch den Antrieb für Werte von $v_u/c > 0{,}8$ an erregt werden können. Infolge der mit der Drehzahl zunehmenden Steifigkeit ziehen sich die Schwingungsgebiete über den ganzen Drehzahlbereich hin. Die an diesen drei Schrauben erhaltenen Ergebnisse sind daher nicht verbindlich. Als Ersatz können die Schrauben Nr. 4 und Nr. 7 angesehen werden, da sich bei einer Dicke von 12% ein Anstellwinkel von 2° und bei einer Dicke von 18% ein solcher von 4° durch die akustische Messung kaum erfassen läßt. Schrauben mit guter Wirkung der Anstellung können daher mit diesen, ohne nachweisbaren Zirkulationseffekt umlaufenden, Schrauben verglichen werden.

[10]) Hierfür bin ich H. Seyffert zu Dank verpflichtet.

2. Meßverfahren

Die zu untersuchende Schraube befindet sich mit ihrem Antriebsmotor[11]) in einem schallgedämpften Raum. Die gesamte Anordnung kann von außen mit einem Handrad meßbar

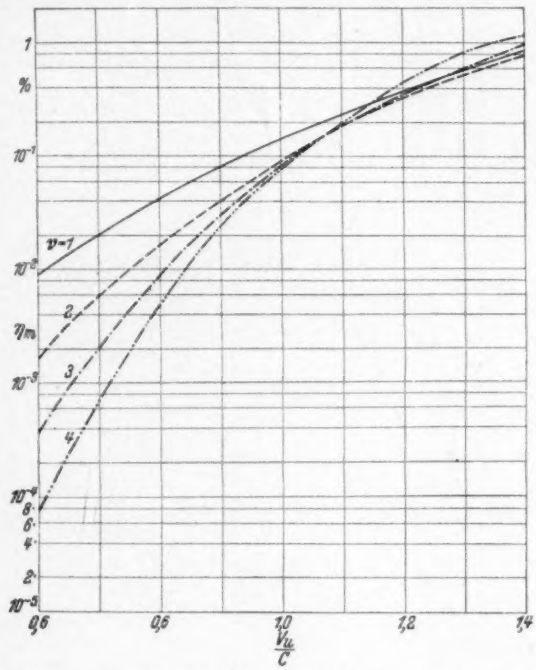

Abb. 15. Der berechnete akustisch-mechanische Wirkungsgrad der Schraube Nr. 6

um den Schraubenmittelpunkt gedreht werden. Über die Drehorgane ist ein Polarkurvenschreibgerät derart mit der Schraube gekuppelt, daß jedem Schraubenwinkel, bezogen auf den Mikrophonort, die gleiche Winkelstellung des Schreibgerätes zugeordnet ist.

Der dem Schalldruck proportionale Mikrofonstrom wird über eine Suchtonanalysiervorrichtung dem Lichtzeigerinstrument zugeleitet, so daß die Auslenkung des Lichtpunktes auf dem Zeichenschirm der Größe des am Suchtongenerator eingestellten Teiltones entspricht.

[11]) Wassergekühlter Induktionsmotor, 30000 U/min, 32 PS, Bauart AVA-Göttingen.

Dreht man bei feststehendem Mikrofon mit Hilfe des Handrades die Schraube um ihren Mittelpunkt, so beschreibt der Lichtpunkt des im Polarkurvenschreiber mitgedrehten Lichtzeigerinstrumentes die Teiltonrichtcharakteristik, welche fotografisch registriert oder einfacher, auf Polarkoordinatenpapier mitgezeichnet werden kann.

Mit einer der Meßanordnung angepaßten Eichdruckkammer wird das Mikrofon über Suchtonanalyse und Verstärker für eine Frequenz absolut in μb/cm Lichtzeigerausschlag geeicht. Da der relative Frequenzgang des Mikrofons bis 10000 Hz nur unwesentlich schwankt, wird die Beziehung zwischen diesem Eichwert und dem jeweiligen Meßwert durch ein veränderliches in Neper geeichtes Dämpfungsglied hergestellt. Der Fehler der Schallfeldmessung liegt unter 5%.

Der Motor wird durch Fernsteuerung von einem Schaltpult aus über seine in der elektrischen Zentrale befindlichen Hintermaschinen [12]) angelassen und geregelt.

Die Schraubendrehzahl muß sehr genau bestimmt werden. Dies geschieht mit einem durch die Motorwelle betätigten Frequenzgeber in Verbindung mit dem AEG-Frequenzmesser.

Abb. 16. Die Messung des Felddruckverlaufes

Der Felddruckverlauf in der Nähe des Schraubenflügels wurde mit einem kleinen kugelförmigen Kondensatormikrofon (Membrandurchmesser 6 mm) untersucht (Abb. 16).

Abb. 17 zeigt das Schema der Meßanordnung, Abb. 18 den Meßraum mit Schaltpult,

[12]) Leonardsatz und 500 Perioden-Generator.

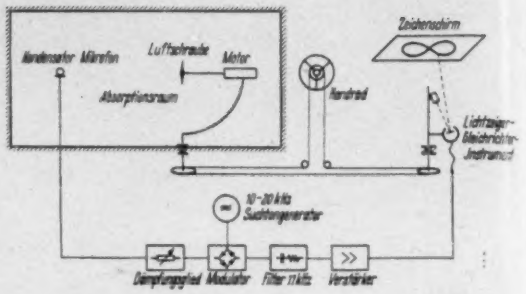

Abb. 17. Das Schema der Meßanordnung

Abb. 18. Der Meßraum

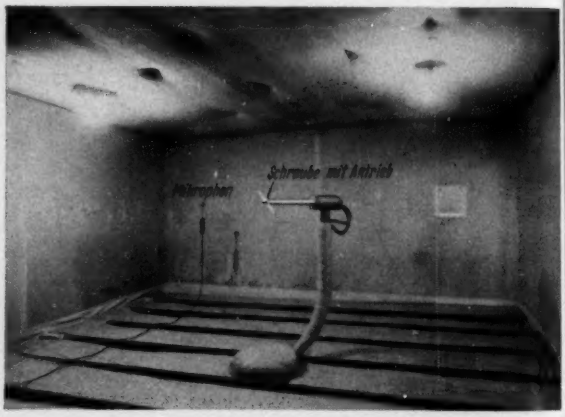

Abb. 19. Der Absorptionsraum mit Luftschraube und Mikrofon

Polarkurvenschreiber, Handrad, Beobachtungsfenster und Eichdruckkammer und Abb. 19 den Absorptionsraum mit Schraube und Mikrofon.

Beim Aufbau der Meßanordnung mußten noch einige Schwierigkeiten beseitigt werden, die z. T. aus der Eigenart des zu analysierenden Frequenzgemisches folgten. Das unvermeidliche Durchschlagen des Suchtones ruft hinter dem am Modulatorausgang liegenden Band-

paß eine die Anzeige fälschende Spannung hervor, die nur durch steile Filterflanken und große Sperrdämpfung vermieden werden kann.

Da bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten die Teiltonenergie mit zunehmender Ordnung ansteigt, muß zur Anzeige der tiefen Komponenten die Verstärkung u. U. soweit erhöht werden, daß durch die hohen Teilfrequenzen der Modulator übersteuert und damit das Ergebnis unbrauchbar werden kann. Eine Beseitigung ist durch eine hinter dem Mikrofonverstärker erfolgende grobe Vorsiebung mit Hilfe eines veränderlichen Bandfilters (Oktavsieb) möglich.

Für das der Auswahl der Summenfrequenzen dienende Filter wurde bei einer mittleren Durchlaßfrequenz von 11000 Hz eine Bandbreite von 200 Hz vorgesehen, da bei schmaleren Filtern die von den Drehzahlschwankungen des Antriebes herrührenden Frequenzänderungen der höchsten Teiltöne während der Aufnahme einer Richtkurve keinen ruhigen Lichtzeigerausschlag zuließen.

3. Die Meßergebnisse, Vergleich mit der Theorie

Um den Einfluß der Strahlungseigenschaften beurteilen zu können, wurden an der Schraube Nr. 4 der Felddruck abhängig von der Umfangsgeschwindigkeit analysiert (vgl. Abb. 1). Die Messung läßt sich nicht einwandfrei durchführen, da in allzu großer Blattnähe sowohl die Feldstörung durch das Mikrofon selbst als auch die bei hohen Umfangsgeschwindigkeiten auftretenden steilen Druckfronten eine Überbewertung der hohen Komponenten bewirken. Der umgekehrte Fehler tritt bei zu großen Abständen wegen der Verbreiterung des Druckstoßes auf. Als günstigster Abstand im Hinblick auf die Abmessungen des Flügels und des Mikrofonkörpers wurde 2,5 cm bei 0,8 R gewählt. Die Darstellung der Ergebnisse für v_u/c-Werte von 0,4—0,9 in Abb. 20 zeigt eine befriedigende Übereinstimmung mit Gl. (2a), nach welcher für die ersten Ordnungen etwa gleich große Amplituden zu erwarten sind.

Die aufgenommenen Polarkurven stellen in Verbindung mit der Druckeichung die Schallfeldverteilung rings um die Schraube dar. Die Schraubenebene liegt bei 0°. Abb. 21a enthält die gemessenen und Abb. 21b die nach Gl. (19) berechneten Richtkurven für eine Schraube ohne Anstellung. Die beigefügten Schalldruckeichwerte geben die absoluten Unterschiede an.

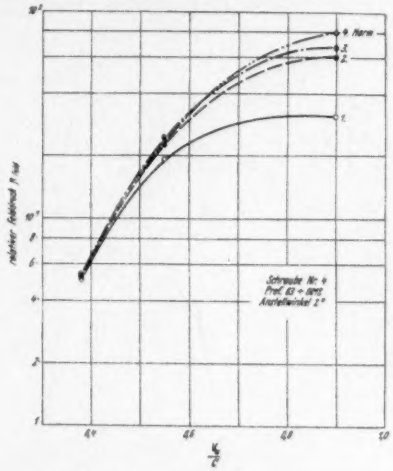

Abb. 20. Felddruckanalysen der Schraube Nr. 4, in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit

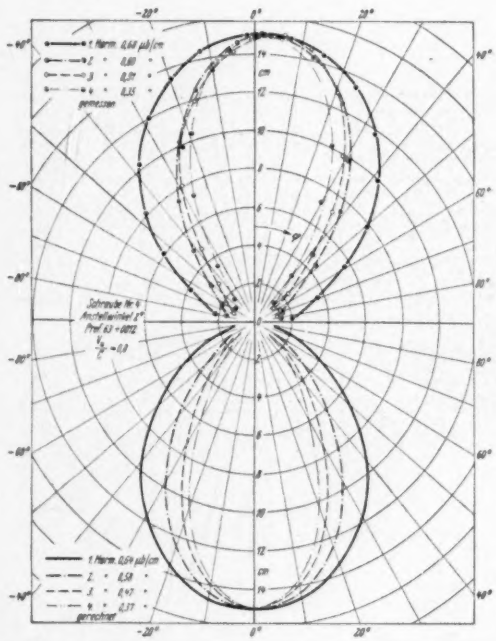

Abb. 21. a) Die gemessene, b) die berechnete Schalldruckverteilung der Schraube Nr. 4 für $v_u/c = 0{,}8$

Mit steigender Teiltonordnung nimmt die Richtschärfe zu.

In der gleichen Weise zeigen Abb. 22a und 22b die gemessenen und berechneten Kurven

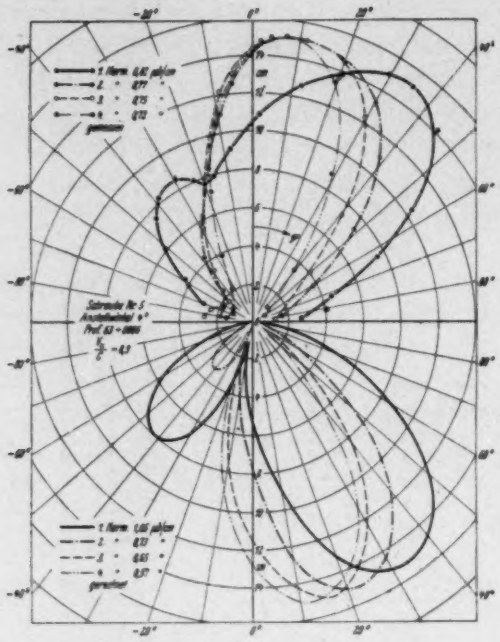

Abb. 22. a) Die gemessene, b) die berechnete Schalldruckverteilung der Schraube Nr. 5 (mit 4^0 Anstellung für $v_u/c = 0{,}9$)

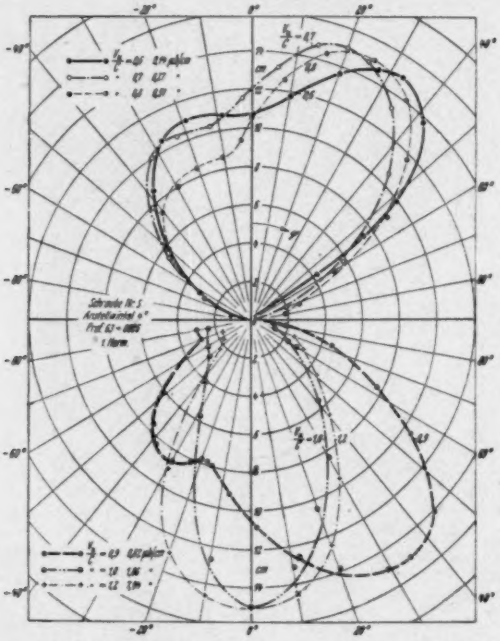

Abb. 23. Die Grundtonrichtkurven der Schraube Nr. 5 bei verschiedenen Umfangsgeschwindigkeiten

einer angestellten Schraube. Durch die axiale Wirkung der Zirkulation entsteht eine Aufspaltung der Polarkurve des Grundtones, welche mit zunehmender Ordnung wegen der

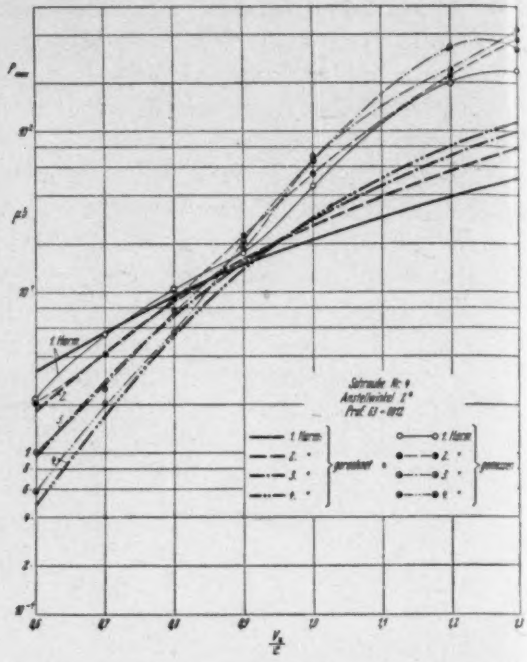

Abb. 24. a) Die gemessenen und berechneten maximalen Schalldrucke der Schraube Nr. 4 in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit

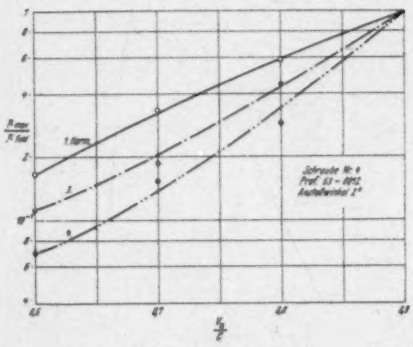

Abb. 24b. Das Verhältnis von Schall- und Felddruck für die Schraube Nr. 4 in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit

gegenseitigen Beeinträchtigung der Zirkulationsteilströmungen verschwindet[13]). Die gemessene Kurve zieht nicht ganz wie die theoretische auf Null ein, was der wirklichen, in die Rechnung nicht eingegangenen, radialen C_a-Verteilung zuzuschreiben ist. Das gegen die Flugrichtung zurückgeneigte Hauptmaximum stellt sich bei hohen Obertönen immer mehr in die Schraubenebene.

[13]) Vgl. Gl. (8).

Die Umfangsgeschwindigkeit bewirkt eine Verformung der Polarkurve. Vergleicht man die gemessene Grundtonverteilung für v_u/c-Werte von 0,6—1,2 (Abb. 23), so bemerkt man ein Maximum der Zirkulation bei $v_u/c = 0{,}9$. Diese verschwindet, wenn die Umfangsgeschwindigkeit den Wert der Schallgeschwindigkeit erreicht hat. Bei noch höheren Geschwindigkeiten verbreitert sich die Richtkurve, was

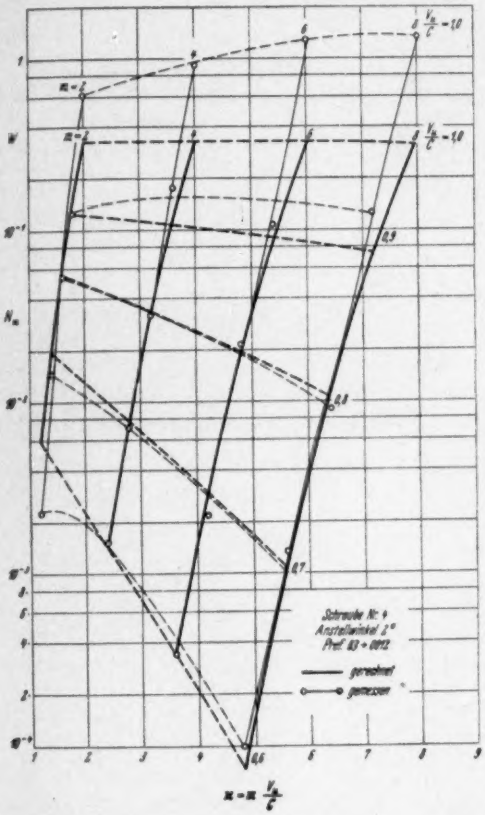

Abb. 25. Gemessene und berechnete Schalleistung der Schraube Nr. 4

einem starken Anwachsen der Strahlungsleistung gleichkommt.

Der in Abb. 24a für die Schraube Nr. 4 durchgeführte Vergleich zwischen den berechneten und gemessenen Schalldrucken im Hauptmaximum der Polarkurve zeigt den Gültigkeitsbereich der Theorie, welche von etwa $v_u/c = 0{,}9$ ab wegen der nichtberücksichtigten Kompressibilität zu kleine Werte ergibt.

Setzt man den als Funktion von v_u/c gemessenen Schalldruck ins Verhältnis zu dem bei den gleichen Betriebszuständen bestimmten Felddruck, indem man willkürlich an der Stelle $v_u/c = 0{,}9$ beide Größen einander gleichsetzt, so erhält man ein anschauliches Bild vom Einfluß der Strahlungseigenschaften auf das Spektrum der lokalen Erregung der Luft (Abb. 24b).

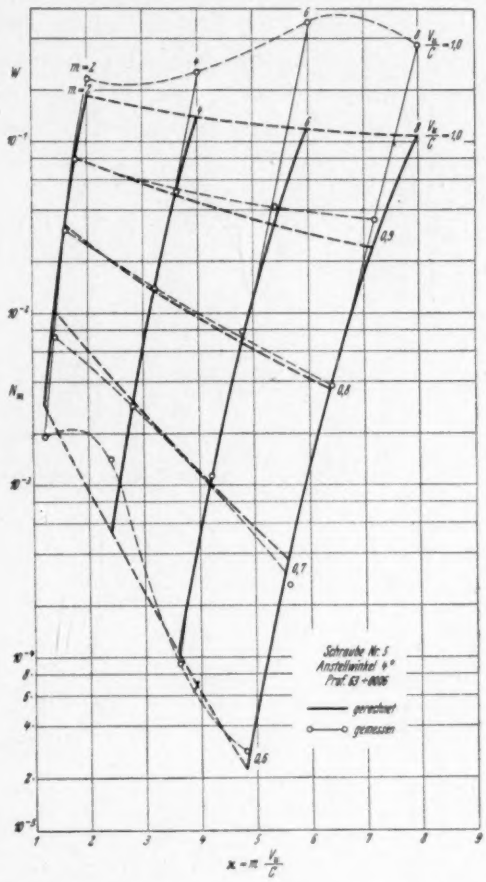

Abb. 26. Berechnete und gemessene Schalleistung der Schraube Nr. 5

Aus den Richtkurven ermitteln wir die Schalleistung durch Bildung des Integrals

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_m^2(\varphi) \cos\varphi \, d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_m^2(\varphi) \, d(\sin\varphi) \, .$$

Zweckmäßig überträgt man die gemessenen Polarkurven auf Sinuspapier und bestimmt deren Fläche mit einem Quadratplanimeter[14]).

Mit Gl. (21b) und Abb. 11 lassen sich nun die Leistungsfunktionen bei bekannten Werten

[14]) Firma A. Ott, Kempten.

des Fourierfaktors und der Blattdicke angeben. Sie wurden gemeinsam mit den gemessenen Werten in Abb. 25 und 26 in Watt aufgetragen. Sowohl die Ergebnisse an der nichtangestellten als auch die an der normal angestellten Schraube stimmen mit der Theorie bis etwa zur MACHschen Zahl 0,9 überein. Die Abweichungen im Grund- und ersten Oberton bei $v_u/c = 0{,}6$ können nicht erklärt werden, sie sind jedoch reell, da sie mehrfach gemessen wurden. Es ergibt sich, daß das Spektrum der angestellten Schraube nach dem Grundton zu stärker ansteigt.

In Abb. 27 ist die rechnerisch bestimmte Schalleistung der ersten und vierten Harmo-

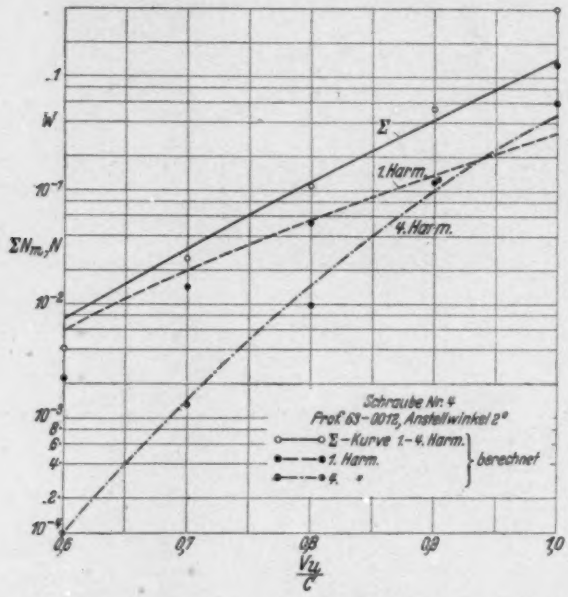

Abb. 27. Die berechnete Schalleistung der Schraube Nr. 4 in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit für die erste Harmonische, vierte Harmonische und für die Summe der ersten vier Harmonischen. Die Kurvenpunkte bedeuten Meßwerte

nischen sowie die Summe der Leistungen der ersten vier Harmonischen in Watt, abhängig von der Umfangsgeschwindigkeit, dargestellt. Die Meßwerte sind als Punkte eingetragen. Die vierte Harmonische nimmt wegen des steileren Ganges ihres Strahlungswiderstandes stärker als der Grundton zu.

Einen ähnlichen Verlauf finden wir in Abb. 28, wo für konstanten Winkel von 4° die Leistungswerte dreier Schrauben aufgetragen sind, deren

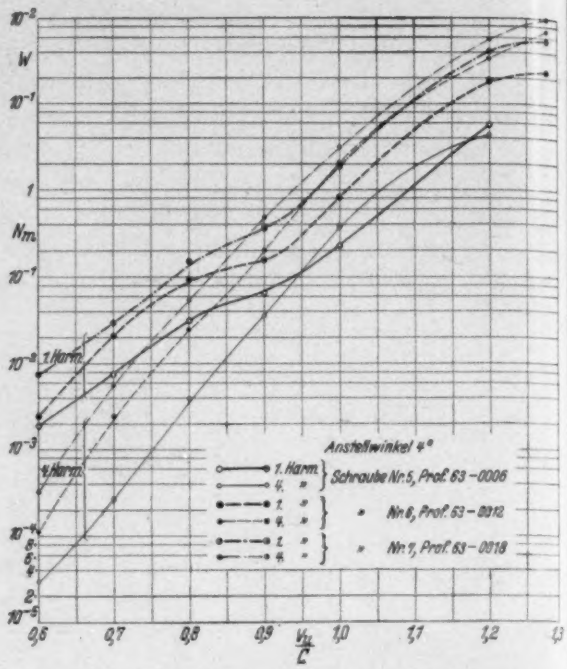

Abb. 28. Die Schalleistung der ersten und vierten Harmonischen bei drei verschiedenen Blattdicken (Schraube Nr. 5, 6 und 7)

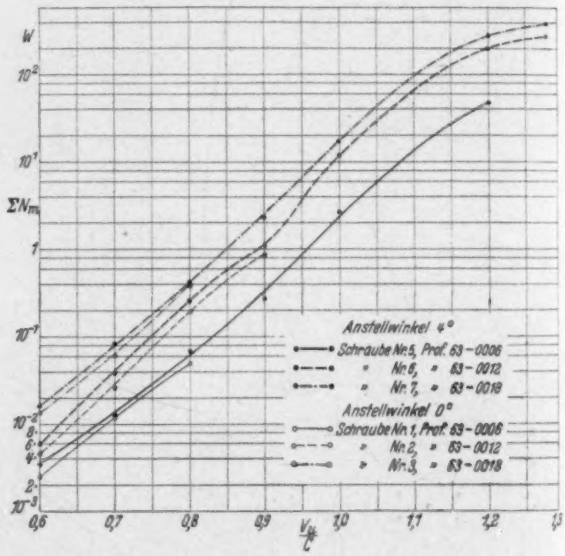

Abb. 29. Die Summenschalleistung der ersten 8 Harmonischen bei drei verschiedenen Dicken

Dicken sich wie 1:2:3 verhalten. Der Einfluß der Anstellung verursacht das Ausbiegen der Grundtonkurven nach höheren Werten, welche von $v_u/c = 0{,}9$ ab wieder in einen glatten Verlauf übergehen. In den Kurven für die vierten Harmonischen bleibt der durch die Anstellung

bewirkte Leistungszuwachs klein. Die gemessene Leistung nimmt mit dem Quadrat der Blattdicke zu [vgl. Gl. (21b)]. Die Grundtonkurven zeigen das gleiche Verhalten erst bei Umfangsgeschwindigkeiten, für welche die Zirkulation Null wird, da die verschiedenen Dicken bei gleichem Anstellwinkel einen ungleichen Leistungszuwachs ergeben.

Eine bessere Beurteilung des Blattdickeneinflusses ermöglichen die Summenkurven der ersten 8 Harmonischen in Abb. 29. Hier gleichen sich die partiellen Störungen aus. Auch die weniger zuverlässigen Ergebnisse für den Anstellwinkel Null bestätigen den vorausgesagten quadratischen Zusammenhang zwischen Profildicke und Strahlungsleistung.

Die schon mehrfach hervorgetretene Wirkung der Anstellung ist zusammenhängend in den Darstellungen der Leistungskurven für vier Schrauben gleicher Dicke und mit verschieden großem Anstellwinkel zu erkennen und zwar in Abb. 30a für die erste und vierte Harmonische und in Abb. 30b für die Summe der ersten bis achten Harmonischen. Während die Grundtonkurven für $\beta = 2^0$, 4^0 und 8^0 nach dem Verschwinden des Zirkulationseinflusses fast in eine einzige Kurve übergehen, ergibt die 12°-Schraube unverhältnismäßig hohe Werte. Dies ist — und das beweisen auch die Summenkurven in Abb. 30b, in welchen die Wirkung der Anstellung kaum mehr erscheinen kann — durch das Abreißen der Strömung bei hohen Geschwindigkeiten zu erklären, was dem Verhalten eines dickeren Profils entspricht.

Vergleicht man noch einmal die Abb. 27 und 30b, so kann man feststellen, daß die Schalleistung des Grundtones etwa mit der 7,5., die der vierten Harmonischen mit der 14. Potenz der Umfangsgeschwindigkeit ansteigt. Die Summe der Schalleistung der ersten vier Harmonischen wächst mit der 10. Potenz. Mittelt man über die Leistungskurven aller Anstellwinkel, so findet man für die Leistungssumme der ersten 8 Harmonischen die 14. Potenz. Der Schalldruck geht mit den halben Exponenten. Über den Wert $v_u/c = 1$ hinaus fallen die Kurven etwas ab.

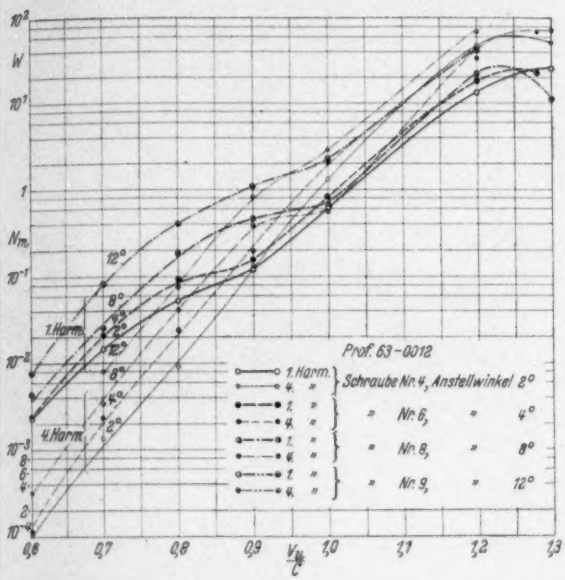

Abb. 30a). Die Schalleistung der ersten und vierten Harmonischen für 4 verschiedene Anstellwinkel

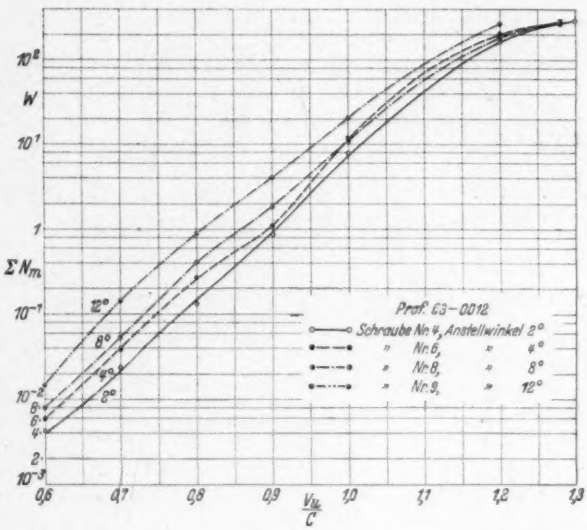

Abb. 30b. Die Summenschalleistung der ersten 8 Harmonischen für 4 verschiedene Anstellwinkel

Trägt man für die Schrauben gleicher Dicke das Verhältnis der Schalleistungen mit und ohne Anstellung auf, wie in Abb. 31 geschehen, so ergeben sich Kurven ähnlich den aus der Aerodynamik bekannten Auftriebsfunktionen.

In Abb. 32 ist ein Vergleich einer 2- und einer 4-Blattschraube durchgeführt. Unterhalb von

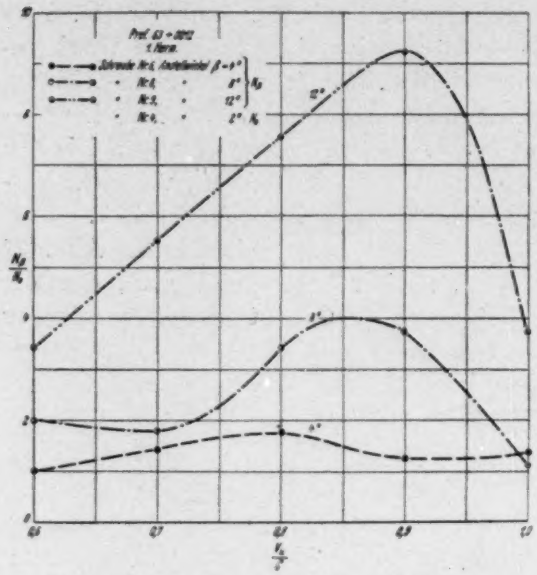

Abb. 31. Das Verhältnis der Schalleistungen mit und ohne Anstellung für 3 Anstellwinkel in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit

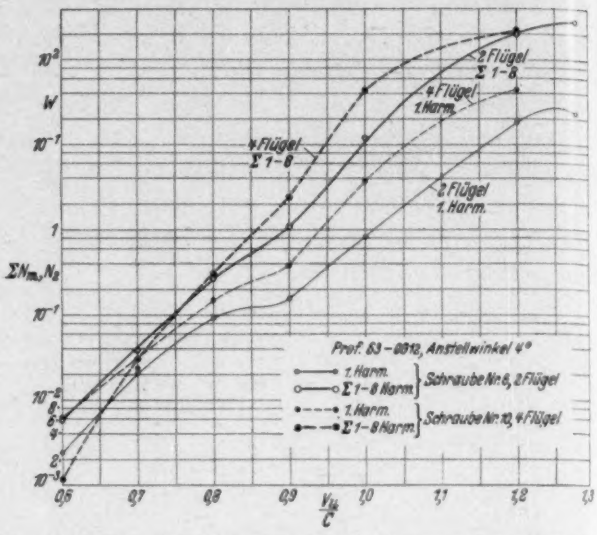

Abb. 32. Vergleich der Schalleistungen einer 2-Blatt- und einer 4-Blattschraube

$v_u/c = 0{,}8$ ist die gesamte von der 4-Blattschraube abgegebene Schalleistung kleiner als die der 2-Blattschraube. Da beide Schrauben gleichen Anstellwinkel besitzen, so ist, auf gleiche aerodynamische Leistung bezogen, der Unterschied noch wesentlich größer.

Abb. 33 enthält die aus den Messungen an der Schraube Nr. 4 mit Hilfe der Gl. (21b) gewonnenen Strahlungsfunktionen $\varkappa^4 S_m^4(x)$ für die ersten 8 Harmonischen und bis zu einer die Schallgeschwindigkeit um 20% übertreffenden Umfangsgeschwindigkeit.

Zusammenfassung

Im ersten Teil der Arbeit werden die grundlegenden Ansätze erörtert, mit deren Hilfe es möglich ist, das Schallfeld und die Strahlungsleistung einer angestellten, im ungestörten Medium umlaufenden Luftschraube in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit, Profildicke und -tiefe und vom Auftriebsbeiwert zu berechnen. Die sich dabei ergebenden, für die Strahlung charakteristischen Funktionen werden aus den Richtfunktionen gewonnen. Sie wurden für Umfangsgeschwindigkeiten zwischen dem 0,6- und 1,4fachen der Schallgeschwindigkeit und für drei verschiedene Auftriebsparameter bestimmt.

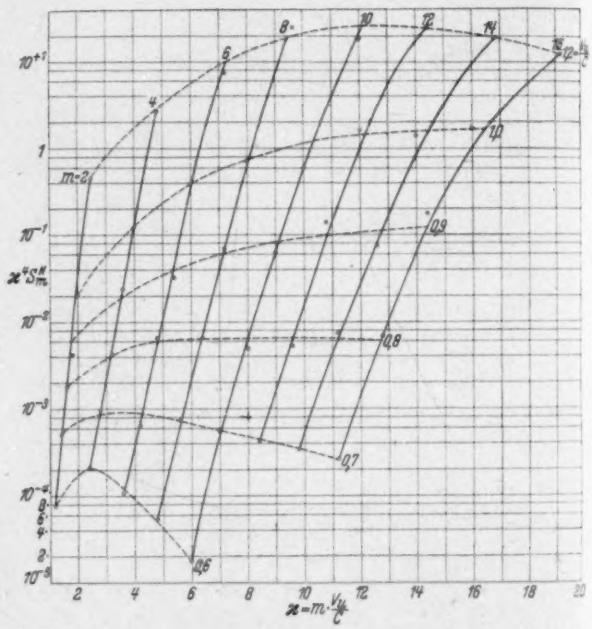

Abb. 33. Die aus den Messungen an der Schraube Nr. 4 bestimmten Strahlungsfunktionen

Die räumliche Schallfeldverteilung wurde an Modellschrauben mit symmetrischen NACA-Profilen, mit Dickenverhältnissen von 6, 12, 18% und Anstellwinkeln von 0°, 2°, 4°, 8°, 12° für jeweils acht Harmonische und Umfangsgeschwindigkeiten von 200 bis 400 m/s gemessen. Bis zu einer Umfangsgeschwindigkeit vom

0,9fachen der Schallgeschwindigkeit stimmt die Theorie mit der Messung auch quantitativ überein. Darüber hinaus steigen die Meßwerte stärker an, da der Einfluß der Kompressibilität in die Rechnung nicht eingeführt wurde.

Die Untersuchungen hatten folgendes Ergebnis:

1. Der Schalldruck nimmt proportional der Blattdicke, die Schalleistung mit ihrem Quadrat zu.

2. Die Anstellung bewirkt eine Aufspaltung der Richtkurven in ein kleines, in Flugrichtung gesehen, vor der Schraubenebene befindliches und in ein großes, hinter der Schraubenebene liegendes Maximum.

3. Der Einfluß der Anstellung verschwindet bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit mit zunehmender Ordnung der Harmonischen. Vom 0,9fachen der Schallgeschwindigkeit ab gehen die Richtkurven und damit auch die Leistungskurven in diejenigen der Anstellung Null über.

4. Die höheren Harmonischen steigen mit der Umfangsgeschwindigkeit stärker an als die tieferen, überwiegen vorübergehend und fallen bei hohen Ordnungen endlich wieder ab.

5. Die Schalleistung des Grundtones steigt etwa mit der 7,5. Potenz, die der vierten Harmonischen mit der 14. Potenz, die Leistungssumme der ersten vier Harmonischen mit der 10. Potenz und die der ersten 8 Harmonischen (gemittelt für verschiedene Anstellwinkel) mit der 14. Potenz der Umfangsgeschwindigkeit.

Meinen Mitarbeitern W. von Wittern, E. Treschau und J. Teumer bin ich für ihre Hilfe bei Aufbau der Meßeinrichtungen und bei der Durchführung der Messungen zu Dank verpflichtet.

(Eingegangen am 23. April 1941.)

SCHRIFTTUM

Sämtliche in diesem Heft besprochenen oder vom Verlag angezeigten Bücher sind in allen deutschen Buchhandlungen zu erhalten

Elektrische Kippschwingungen. Wesen und Technik von Ing. Heinz Richter. 154 S. mit 161 Abb. 1940. Verlag von S. Hirzel, Leipzig. Geh. RM. 10,—, geb. RM. 11,50.

Das Interesse an Kippschwingungen ist seit Einführung des Kathodenstrahlrohres als Gebrauchsinstrument für alle Arten der Messung im nieder- und hochfrequenten Gebiet, insbesondere beim Fernsehen in stetem Wachsen begriffen. Es ist daher besonders zu begrüßen, daß wir nunmehr ein Buch besitzen, das die Kippschwingungen als Hauptsache behandelt.

Ausgangspunkt des Buches bildet die mathematische Behandlung von Sägezahnkurven mit zeitlinearem und exponentiellem Aufladungsvorgang, auf welche zwei Fälle sich der Verfasser bewußt beschränkt. Die Fourierzerlegung solcher Kurven sowie ihre Synthese bildet Gegenstand weiterer Betrachtungen, deren Kenntnis für die Herstellung und Übertragung von Kippschwingungen notwendig ist. An theoretischen Arbeiten, die sich mit dem Thema befassen, gibt es eine ganze Reihe, deren wichtigste kurz erläutert werden. Wichtig für die Praxis sind die Schaltungen zur Erzeugung freier und erzwungener Kippschwingungen nebst den dazugehörigen Einrichtungen zur Frequenzteilung und -vervielfachung. Die Möglichkeiten sind hier so mannigfach, daß eine Systematik in den Stoff zu bringen, schwierig war. Durch Trennung der C- und L-Schaltungen wird eine Einteilung gewonnen, welche die Fälle des Gebotenen immer leicht auf die einfachen Grundformen zurückzuführen gestattet. Natürlich finden Synchronisierungs-, Modulations- und Verstärkungsfragen gebührende Würdigung. Das Buch ist seiner ganzen Art nach für den Praktiker geschrieben. Es erscheint in der Schriftenreihe Physik und Technik der Gegenwart, herausgegeben von H. Fassbender. Lottermoser

L. W. Labaw, **Transmission of Sound Through Parallel Conduits.** J. Acous. Soc. Am. 12 (1940), Heft 2, S. 232.

Es wird der Schalldurchgang durch ein spezielles Rohrleitungssystem in Analogie zur elektrischen Leitungstheorie theoretisch behandelt. Die Rohrleitung setzt sich zusammen aus einer unendlichen oder auch endlichen Zahl gleicher Rohrabschnitte, von denen jeder aus einer Parallelschaltung zweier Rohre im allgemeinen verschiedener Länge und Querschnitte besteht. Diese Rohrabschnitte sind durch Zwischenschaltung einfacher Rohrstücke konstanter Länge alle in Reihe geschaltet (s. Abb. 1).

Unter der Voraussetzung, daß man sich auf ebene Wellen im Rohr beschränken kann, und unter

Vernachlässigung der Verluste wird aus den Leitungsgleichungen und aus der Kontinuitätsbedingung für den Schallfluß und den Schalldruck an den Verzweigungspunkten ein Ausdruck für das Übertragungsmaß abgeleitet. Das Übertragungsmaß ist eine Funktion der Rohrlängen und Querschnitte. In dem interessierenden Frequenzbereich bis 10000 Hz erhält man eine große Zahl von Sperrbereichen. Die Lage der Sperrbereiche hängt dabei

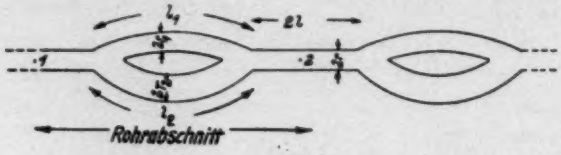

Abb. 1. Schematische Darstellung der Filterrohrleitung

im wesentlichen von den verwendeten Rohrlängen, die Breite jedoch von dem Verhältnis der Rohrquerschnitte ab.

Betrachtet man statt der unendlichen Rohrleitung eine mit endlicher Zahl von Rohrabschnitten, so erhält man Änderungen für das Dämpfungsmaß, die auch von der Art des gewählten Rohrabschlusses abhängen. Es wird theoretisch untersucht, wie man diese Änderungen durch einfache Abschlußformen, z. B. offenes oder geschlossenes zylindrisches Rohrende, sich erweiternde oder verjüngende Kegel, klein halten kann. Als günstige Abschlußform wird ein geschlossener Kegel festgestellt.

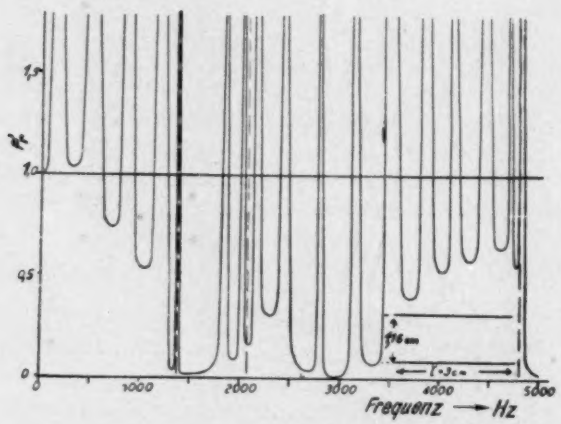

Abb. 2. Übertragungsverhältnis für die Schallschnelle eines 5gliedrigen Filters nach Abb. 1 bei offenem Rohrabschluß

In den Abb. 2 und 3 werden zwei Beispiele gezeigt, für eine Rohrleitung mit 5 Rohrabschnitten ($2\,l = l_1 = l_2 = 5$ cm, $r = 0{,}58$ cm, $r_1 = 0{,}70$ cm, $r_2 = 0{,}40$ cm) und einem offenen Rohr bzw. geschlossenen Kegel als Rohrabschluß, wie in den Skizzen zu den Abbildungen eingezeichnet ist. Als Ordinate P'_r ist dabei das Verhältnis der Schall-

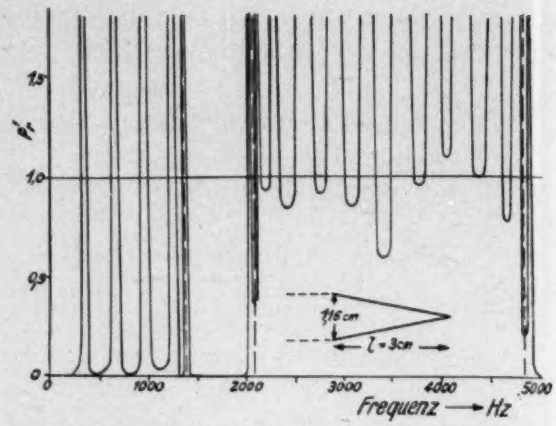

Abb. 3. Übertragungsverhältnis für die Schallschnelle eines 5gliedrigen Filters nach Abb. 1 mit einem geschlossenen Kegel als Rohrabschluß

schnelle am Ende des letzten zu der am Anfang des ersten Rohrabschnittes aufgetragen. Entsprechend dem Verhalten bei der Frequenz Null stellt Abb. 2 ein Tiefpaß- und Abb. 3 ein Hochpaßfilter dar; die gestrichelt eingezeichneten Linien deuten die Sperrbereiche für die entsprechende unendlich lange Rohrleitung an. LIPPERT

J. OBATA und R. KOBAYASHI, **Further Applications of our Direct-Reading Pitch and Intensity Recorder**. J. Acous. Soc. Am. 12 (1940), S. 188.

Mit dem früher (J. Acous. Soc. Am. 9 (1937), S. 156; 10 (1938), S. 147) beschriebenen Tonhöhenanzeigegerät untersuchten Verf. das Vibrato und die Koloratur verschiedener berühmter Sopranstimmen. Abb. zeigt ein Beispiel eines besonders gleichmäßigen Vibratos mit gleichzeitigem An- und Abschwellen der Intensität. Die Versuche ergeben, daß ein Kennzeichen besonders guter Stimmen die Gleichförmigkeit in der Schnelligkeit und im Frequenzunterschied des Vibratos ist. Mit dem Gerät wird ein spezifisch japanischer Gesang mit eigenartigem Triller untersucht. Die Aufnahmen, die in der Mehrzahl von Schallplatten gewonnen wurden, zeigen die Leistungsfähigkeit der Methode.

LOTTERMOSER

W. T. BARTHOLOMEW, **The Paradox of Voice Teaching**. J. Acous. Soc. Am. 11 (1940), S. 446.

Der Sprachgebrauch der Musiker, insbesondere der Musikpädagogen, weicht stark ab von den Ausdrücken und Bezeichnungen der akustischen und physiologischen Forschung. Daraus ergeben sich ununterbrochene Mißverständnisse zwischen den Vertretern beider Gebiete. Das gilt vor allem auch für die Gesangsmethodik. Die physikalischen und physiologischen Voraussetzungen für eine „schöne Stimme" sind ausgehaltene Vokale mit einem an-

gemessenen, weichen Vibrato und einem stark hervortretenden unteren Formanten zwischen 400 und 600 Hz. Um diese tiefe Formantlage zu erreichen, muß der Kehlkopfraum so erweitert sein, daß seine Eigenfrequenz von etwa 1000 Hz, wie es für ausgesprochen „kehlig" klingende Stimmen zutrifft, auf 400 bis 600 Hz heruntergeht. M. a. W., die „weite Kehle" als Resonanzraum ist wissenschaftlich betrachtet eine Vorbedingung für eine gute Stimmqualität.

Demgegenüber wird in der Methodik des Gesangunterrichtes immer von „Kopfresonanz" gesprochen und davon, den Klang „aus der Kehle herauszuholen", ihn „vorwärts", „ins Gesicht" oder „gegen die Zähne" zu verlegen. Auch erfährt man z. B., daß „die Vibrationen der Stimme stets ganz vorn im Munde gespürt und nicht in der Kehle gegurgelt werden sollen", usw. Während nun tatsächlich die Gesichts- und Nasenpartien praktisch nichts zu einer wirkungsvollen Resonanz beitragen, sind sie doch von höchster pädagogischer Bedeutung. Denn auf dem Umweg über den Hinweis auf diesen Teil des Kopfes ist es möglich, den Schüler indirekt zu einer günstigen Muskelspannung und vorteilhaften Haltung des Kehlresonators zu veranlassen. In diesem Paradoxon liegt eine wesentliche Ursache für alle Meinungsverschiedenheiten zwischen Wissenschaft und Gesangpädagogik, sowie auch zwischen den Gesanglehrern und ihren verschiedenartigen Methoden untereinander. Verfasser äußert den Wunsch, daß die Wissenschaftler für die Zweckmäßigkeit in der Ausdrucksweise der Gesangpädagogen und umgekehrt auch die Gesangpädagogen für den Sprachgebrauch der Wissenschaft mehr Toleranz und Verständnis aufbringen mögen.

E. Thienhaus

E. G. Wever, Ch. W. Bray und M. Lawrence, **The Locus of Dictortion in the Ear**. J. Acous. Soc. Am. 11 (1940), S. 427.

Wever und Bray hatten früher gezeigt, daß die im Ohr verursachten Verzerrungen der Messung direkt zugänglich sind, wenn die Ströme, die vom runden Fenster abgeleitet werden können, direkt auf ihren Klirrfaktor untersucht werden. Bei Einwirkung großer Schalldrucke eines reinen Tones auf das Ohr der untersuchten Katzen wurden im abgenommenen Strom bis 16 Obertöne mit einer Intensität von 50% des Grundtones festgestellt. Aus den Versuchen war indessen nicht eindeutig zu erkennen, wo der Sitz dieser Verzerrungen ist. Zur Klärung der Frage wurde das Mittelohr von Meerschweinchen unter Narkose soweit entfernt, daß man das Innenohr mittels eines schwingenden Kristalles über eine Stahlnadel, die fest an die Steigbügel des Mittelohres gedrückt war, direkt mit Tönen anregen konnte. (Druckänderungen zwischen Nadel und Steigbügel hatten keinen Einfluß auf die Größe der Verzerrung). Mit einem Vibrationsmikroskop wurde die Linearität der Erregung kontrolliert. Gemessen wurde bei Frequenzen von 300, 1000 und 3000 Hz in einem Intensitätsintervall von 80 db. Zum Vergleich wurden bei unversehrtem Mittelohr unter Einwirkung von Luftschall Kontrollen ausgeführt. Die gewonnenen Diagramme zeigen die Abhängigkeit der Ströme von der Schnecke (Grundton und 5 Obertöne) in Mikrovolts von der Stärke der Erregung. Dabei entspricht der Nullpunkt der in db aufgetragenen Erregungsintensität willkürlich einer Luftbeschallung mit 1 dyn/cm². Das Untersuchungsergebnis läßt erkennen, daß der Obertongehalt bei Luft- und oben beschriebener direkter Erregung den gleichen Verlauf besitzt. Es wird deshalb geschlossen, daß die nichtlinearen Verzerrungen nicht durch die Übertragung des Mittelohres zustande kommen, sondern in der Hauptsache im Innenohr entstehen.

Lottermoser

André Dammann, **Enregistrements et Analyses de Sons Musicaux**. Pubblicazioni Dell Università Cattolica Del S. Cuore, Milano, Societa Editrice „Vita e Pensiero" MCMXL—XVIII.

Mit dem Kathodenstrahloszillographen wurden Flöte, Klarinette, Posaune, Trompete und Geige untersucht. Von jedem Instrument wurden Klänge verschiedener Tonhöhe und Lautstärke aufgenommen. Die Fourieranalyse geschah mit dem Analysator von Coradi. Die Versuche bestätigten bereits bekannte Forschungsergebnisse und erbrachten darüber hinaus den Nachweis starker nichtharmonischer Teiltöne, besonders bei Flöte und Trompete. Die Phasenlage der Teiltöne wurde in Diagramme aufgetragen, wodurch gewisse Gesetzmäßigkeiten klar werden, die wohl u. a. auf das Vorhandensein von Formantgebieten zurückgeführt werden können.

Lottermoser

C. P. Boner und R. B. Newman, **The Effect of Wall Materials on the Steady-State Acoustic Spectrum of Flue Pipes**. J. Acous. Soc. Am. 12 (1940), S. 83.

Die Frage, ob bei Blasinstrumenten, insbesondere den Orgelpfeifen, das Material einen Einfluß auf den Klang hat, beschäftigt Akustiker und Musiker schon lange. Aus der Zusammenstellung von Arbeiten seit etwa 1817, die vorliegenden Messungen vorangestellt ist, wird ersichtlich, wie verschieden die Ansichten über diesen Punkt sind. Die Art der Anordnung, die Verf. zu ihren Versuchen benutzten, ist dieselbe wie die von W. Lottermoser (Akust. Z. 2, (1937) S. 129; 3 (1938), S. 63). Auf einem mit Ansatzrohr versehenen Pfeifenfuß mit der normalen Anblasvorrichtung werden Röhren aus verschiedenen Materialien aufgesteckt. Untersucht wurden Blei-Zinn-Legierung, verzinntes Eisen, Stahl, Schellackpapier,